La abstracción y la vida real

José-Miguel Pacheco Castelao

MMXIV

Las Palmas

1 Presentación

Como matemático, me siento obligado a ofrecerles en este acto algunas reflexiones sobre la ciencia matemática y su articulación con otros campos del conocimiento, sus encuentros y desencuentros con ellos, su relación con las estructuras sociales, y, en definitiva, con casi cualquier asunto que se nos ocurra traer a escena. Así pues, intentaré presentarles aspectos que muchos no matemáticos consideran recónditos y un tanto misteriosos; sin embargo es posible compartirlos, entenderlos, y disfrutar de su comprensión.
El gran novelista argentino Ernesto Sabato, en un memorable artículo publicado con motivo de la muerte de Albert Einstein, escribía en 1955:

> "Leemos una página de *Rojo y Negro*, y tenemos la curiosa creencia de que cualquiera de nosotros sería capaz de escribir algo parecido; pero tropezamos con una frase como "el tensor G es nulo" y nos ponemos a temblar de pavor y sentimiento de inferioridad."[1]

Quisiera creer que tras los pensamientos en voz alta que les expondré saldrán Uds convencidos de que el terror invocado por Sabato es desde luego superable. Para ello utilizaré un lenguaje lo más informal posible –lo que no significa impreciso–, enviando a las notas finales del texto definitivo aquellos tecnicismos que, a pesar de todo, resulten inevitables.

2 Introducción

En septiembre del año 1940, con motivo del segundo centenario de la Universidad de Columbia en Nueva York, el matemático, físico y filósofo alemán Hermann Weyl fue invitado a pronunciar una conferencia plenaria, con el sugestivo título de *The mathematical way of thinking.* Weyl estaba exilado en Estados Unidos desde 1935 y aunque él no era judío, sí su mujer, habiendo

[1]Sabato, Ernesto (1955) Poderío e impotencia de Einstein, *Atenea* 121(360), 361-369.

sido su valedor en aquel país el propio Einstein. El texto de su intervención se publicó poco después en la revista *Science* –en aquellos tiempos las Matemáticas tenían todavía acceso a tales foros– y debería considerarse lectura obligada para cualquiera con mínimos intereses científicos, matemáticos o no, porque resulta difícil no estar de acuerdo con sus apreciaciones acerca de cómo emerge una forma específica de pensar, en especial si se considera conjuntamente con el casi eterno problema de cuál es la mejor forma de enseñar Matemáticas.[2]

En realidad, la conferencia era una revisión de otra bastante anterior pronunciada en 1931 ante la asociación de profesores suizos de Matemáticas en Berna[3], y cuyas palabras iniciales, toda una declaración de intenciones, son éstas:

> "No nos satisface captar las verdades matemáticas tras complicadas cadenas de deducciones y cálculos, tanteando, como a ciegas, entre un paso y otro. Preferiríamos disfrutar de una visión de conjunto, comprender los fundamentos últimos que sustentan los razonamientos, comprender *la*(*s*) *idea*(*s*) de las demostraciones, y las profundas relaciones tras ellas."[4]

El proceso para llegar al razonamiento matemático es presentado por Weyl en tres pasos:

El primero, pensar sobre problemas concretos –think concretely–, con auxilio de figuras, ejemplos, analogías, y observaciones empíricas.

Segundo, donde se presenta la mayor parte de las dificultades del aprendizaje, traducir las ideas intuitivas o concretas a construcciones simbólicas, manejadas según reglas bien definidas para deducir otras nuevas, método que conforma una vía epistémica bien conocida a lo largo de la historia conjunta de las Matemáticas y la Física. También se conoce esta etapa como de construcción de modelos matemáticos.[5]

Finalmente, el tercer paso, al cual acceden pocos, consiste en despojar a los símbolos y reglas de la etapa anterior de toda vinculación con objetos reales, transformándolos en puros entes de razón sobre los que elaborar el discurso deductivo. La historia de la Ciencia nos muestra también con mucha frecuencia las trampas y los peligros de este salto conceptual, pues el status ontológico de los nuevos constructos u objetos mentales ha sido y es motivo de discusiones y conflictos, además de sembrar muchas dudas sobre la validez –cualquiera que sea el significado de esta palabra– epistémica de las conclusiones obtenidas.

Existe también un cuarto paso no considerado en el texto de Weyl: el retorno del conocimiento generado por el pensar matemático a la sociedad, aunque es de suponer que tal cuestión no era baladí en los comienzos de la segunda Guerra Mundial. No tenemos pautas para esta etapa, pues

[2] Weyl, Hermann (1940) The mathematical way of thinking, *Science* 92, 437-446.

[3] Weyl, Hermann (1931) Topologie und abstrakte Algebra als zwei Wege mathematisches Verständnisses, *Unterrichtsblätter für Mathematik- und Naturwissenschaftler* 38, 177-188.

[4] "Wir werden uns nicht gerne damit zufrieden, einer mathematischen Wahrheit überführt zu werden durch eine komplizierte Verkettung formeller Schlüße und Rechnungen, an der wir sozusagen blind von Glied zu Glied entlang tasten müßen. Wir möchten vorher Ziel und Weg überblicken können, wir möchten der inneren Grund der Gedankenerfährung, *die Idee* des Beweises, den tieferen Zusammenhang verstehen." Los subrayados son míos.

[5] Hay muchos textos que tratan este tema. Véanse p. ej. Gershenfeld, Neil (2006) *The nature of mathematical modeling*, Cambridge University Press, UK; y Fowler, Andrew (2011) *Mathematical Geoscience*, Springer New York.

hay tiempos en que los avances en Matemáticas aparecen como sin sentido, y repentinamente se encuentran interpretaciones y aplicaciones insospechadas: un buen ejemplo, extraído de la Medicina, sería señalar que gran parte de las técnicas de tomografía están inspiradas por los trabajos teóricos de Radon realizados hace un siglo, que hubieron de esperar casi otro medio por los avances tecnológicos pertinentes antes de devenir en herramientas habituales. Lo contrario también ocurre, cuando los matemáticos se ven incapaces de proveer teorías y métodos para abstraer y estudiar hechos de comprensión difícil, como es el caso de las Ciencias Sociales y su larga relación de amor y odio con las Matemáticas.[6] Otras veces, como en los años del desarrollo de la Mecánica Cuántica –más o menos los primeros treinta del siglo XX–, los logros obtenidos en Física y Matemáticas, aunque simultáneos, no confluyeron hasta finales de los años 1920. En general, me atrevo a afirmar que *a priori* no sabemos cuándo ni qué elucubraciones teóricas resultarán útiles, ni cómo.

He aquí un par de ejemplos clásicos en apoyo de la tesis de los tres pasos. Uno, la conocida y un tanto arrogante fraseología de la introducción de Joseph-Louis Lagrange a su *Mécanique Analytique* de 1788: "Le lecteur ne trouvera point de figures dans cet ouvrage", y "Ceux qui aiment l'analyse verront avec plaisir la méchanique en devenir une nouvelle partie..."

Otro es la construcción de la geometría proyectiva por Karl Von Staudt, en el también carente de figuras *Geometrie der Lage* de 1847. A este respecto, el matemático y profesor salmantino Norberto Cuesta solía comentar con alguna malicia, y así lo dejó escrito, que "... ya me gustaría a mí haber visto la papelera de Von Staudt..."[7] Casos de mentes muy representativas del tercer nivel: citaré sólo a Emmy Noether, considerada justamente la fundadora del Álgebra Abstracta, pero cuyas contribuciones publicadas en 1918[8] sobre la íntima relación entre la idea generalizada de simetría y la de ley de conservación en Física han sido determinantes en la Física teórica, y al recién desaparecido apátrida Alexander Grothendieck, quien hace tiempo abandonó las Matemáticas, pero cuyo formidable nivel de abstracción, sobre todo en Geometría, está fuera de toda duda. Sus memorias o reflexiones acerca de su pasado como matemático, bien merecen ser leídas en detalle.[9]

El paso cuarto está tan imbricado con el desarrollo de otras ciencias que nos llevaría a largas excursiones, y lo trataré a continuación a través de una historia que estimo les resultará interesante.

Es notable también que en la visión de Weyl no se considere la tradicional polémica acerca de si las Matemáticas se descubren o se crean/construyen.[10] Una respuesta tajante a tal alternativa es poco probable que se obtenga alguna vez, y no seré yo quien proponga aquí una contestación, ni siquiera una tercera o cuarta vía de aproximación. Tampoco está presente el problema de

[6] Pacheco, José M. (2008) *Does more abstraction imply better understanding?* Preprint series of the Max Planck Institute for the History of Science (Berlin) Nº 351.

[7] Cuesta, Norberto (1982) *La Sinfonía del Infinito, y ya en el paraíso de Euler,* Ediciones Universidad de Salamanca.

[8] Noether, Emmy (1918) Invarianten beliebiger Differentialausdrücke. *Göttinger Nachrichten* 1918, 37-44. También: Noether, Emmy (1918) Invariante Variationsprobleme. *Göttinger Nachrichten* 1918, 235-257.

[9] Grothendieck, Alexander (1986) *Récoltes et sémailles*, http://www.math.jussieu.fr/~leila/

[10] Cañón, Camino (1993) *La Matemática: ¿creación o descubrimiento?*, Publicaciones de la Universidad Pontificia de Comillas, Madrid.

la verdad matemática, cuestión que algo antes de la conferencia de Weyl en Berna había sido dilucidada por Gödel[11] al señalar, y probar, que la idea de verdad no es reducible a la de demostrabilidad. Permítanme que les invite a reflexionar un poco formulándoles una pregunta: Cuando en esos films donde intervienen jueces y abogados se escucha la expresión "...se ha probado, más allá de toda duda razonable, que..." ¿qué entendemos o queremos entender exactamente?

3 Una historia

Tal vez resulte polémico si les digo que el desarrollo de las Matemáticas desde principios del siglo XX vive de las rentas de los formidables pensadores del XVIII y el XIX. No me refiero a la cantidad de literatura matemática producida desde 1900, ni a los indudables progresos realizados sobre todo a partir del final de la segunda Guerra Mundial, sino a que las ideas, concepciones y métodos cuyo estudio conforma el objetivo de las ciencias matemáticas están *todos* enraizados en escritos y trabajos de unas pocas personas que supieron avanzar en la escala de Weyl durante aquellos espléndidos años. Además, y de acuerdo con Lagrange, estimo conveniente no distinguir nítidamente entre Física y Matemáticas, tanto, que llevados al extremo, aceptaré sin dudar la definición dada por el excelente matemático y físico soviético Vladimir I. Arnold en un discurso pronunciado en el Palais de la Découverte de París, el 7 de Marzo de 1997 –ya no era soviético en ese año, claro está–, acerca de la enseñanza de las Matemáticas:

> "Las Matemáticas son parte de la Física. La Física es una ciencia experimental. Las Matemáticas son aquella parte de la Física donde los experimentos resultan baratos."

Aunque sin duda se pueden encontrar ejemplos más espectaculares, la historia científica y matemática que les presentaré, comentando de paso sus conexiones con los entornos social y técnico durante su desarrollo tiene también, en mi opinión, la ventaja de poder narrarse con un mínimo de aparato matemático, además relativamente elemental.

En la práctica, la búsqueda y gestión de fuentes de energía es uno de los pilares de la historia de la Humanidad, marcada por la necesidad o el deseo de superar las capacidades individuales, o en grupo, para realizar trabajos penosos, que abundan más de lo deseable. Hace ya muchos siglos se conocían máquinas simples tales como poleas, palancas, planos inclinados, espejos, etc, aplicadas al aprovechamiento de algunas de esas energías que hoy día se llaman renovables, como la radiación solar, los vientos y las corrientes de agua. Así nacieron los riegos, la navegación, el procesado de alimentos y muchas más técnicas y tecnologías, elementos importantes y determinantes de las condiciones de la vida cotidiana: por poner un ejemplo, en *El Quijote* leemos acerca de molinos de viento y batanes hidráulicos, máquinas usadas en la producción de

[11] Gödel, Kurt (1931)Über formal entscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandten Systeme I, *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38, 173-198. La parte II no se publicó nunca. Hay traducción española en las *Obras Completas* de Gödel, editadas por Jesús Mosterín y publicadas por Alianza Editorial en 1981. Edición revisada, en 2006.

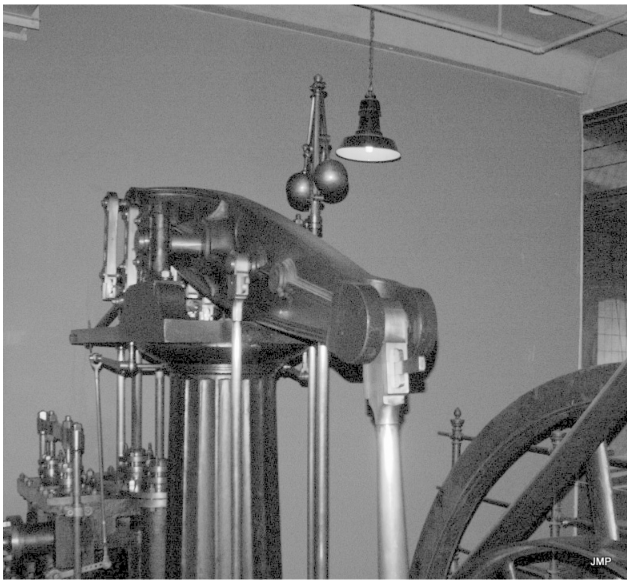
harina y de tejidos, respectivamente. Sin embargo, la evolución en el dominio de otras clases de energía fue muy lenta, y sólo a mediados del siglo XVIII se consiguió transformar de manera más o menos eficaz energía química en mecánica mediante las primeras máquinas de vapor, cuya capacidad de trabajo superó pronto a la de la pura fuerza muscular de personas y animales domésticos en tareas tales como el achique de agua en las minas de carbón –el filomarxista e historiador de la ciencia John D. Bernal[12] comenta con cierta ironía que entonces y en ese caso la cuestión económica no constituía todavía un problema: bastaba con tomar algo del propio producto de la mina– y hacia 1800 ya se había desarrollado una sofisticada tecnología de las máquinas de vapor, tanto que pocos años más tarde abandonaron sus posiciones estáticas para transformarse en propulsores habituales de vehículos automóviles, en principio buques y ferrocarriles.

Máquinas y autocontrol

Dejemos ya entrar a la Física y las Matemáticas, ambas vienen de la mano de la máquina de vapor. Ésta genera un movimiento lineal por desplazamiento de un pistón en el interior de un cilindro, debido a la presión del vapor inyectado contra una de sus caras. Las primeras máquinas sólo poseían un cilindro vertical, y el vapor se insuflaba por la parte inferior, empujando hacia arriba el émbolo, traduciéndose luego ese recorrido en la actuación de una palanca o sistema de ellas para elevar una masa, por lo general un recipiente de agua de buen tamaño, una roca, o algo semejante. Una vez terminado el recorrido, el pistón debía bajar con cierta rapidez para iniciar un nuevo ciclo, cosa que podía obtenerse de varias formas: Enfriando las paredes del cilindro para licuar el vapor, o abriendo una válvula para dejarlo salir, o con un peso adicional en la cara superior del pistón, o una combinación de todo ello. Con tales sistemas los ciclos no se sucedían con mucha continuidad y por tanto la eficiencia resultaba muy escasa. Pero la técnica se fue refinando: por ejemplo, una vez enfriado el cilindro, se podía usar algo de vapor para calentarlo desde el exterior antes del siguiente ciclo y evitar la pérdida debida al vapor inyectado que se licuaba en contacto con las paredes demasiado frías, o usar un cilindro cerrado por arriba y enviar vapor a la cara superior del émbolo para ayudar en su descenso, lo que se consiguió con un sistema de válvulas, ligado a la propia biela, para alternar el acceso del vapor a uno u otro lado del pistón. Cuando se consiguió transformar eficazmente el movimiento de vaivén rectilíneo en otro circular –lo cual no resultó sencillo, entre otras causas por problemas legales ligados con las patentes– se puso de relieve que la máquina *podía regularse* a sí misma, al observar que su movimiento serviría también para activar mecanismos anexos capaces de gobernar –de ahí deriva la palabra "cibernética", con la misma etimología que "gobernar"– los procedimientos de entrada y salida del vapor, enfriamiento, etc, de forma *automática.* Algo así ya se conocía desde tiempo atrás para el escape de los relojes, y algunos molinos de harina disponían también de sistemas parecidos, aunque con intervención humana, para mantener las muelas a la distancia adecuada, porque con el giro la superior o móvil tendía a elevarse debido

[12]Bernal, John D. (1975) *La proyección del hombre: Historia de la Física clásica*, Editorial Siglo XXI, Madrid y México.

a la fuerza centrífuga.[13]



Regulador de Watt en lo alto de una máquina de vapor de cilindro vertical (foto del autor)

Un matemático definiría lo anterior con la palabra *retroalimentación*, y además denotaría como *no lineal* el proceso de modificación del régimen de funcionamiento. Así, con la máquina de vapor nació la moderna teoría del control, siendo el regulador centrífugo de James Watt el artilugio que inauguró la era del dominio de la energía. En su nombre inglés, el aparato conserva el nombre de *centrifugal governor*, y como observación curiosa, figura en el centro del emblema de la Ingeniería Industrial española. En la Nota 1 se ofrece un comentario algo más extenso y técnico.[14]

Un problema nuevo, que sólo se resolvió a partir de consideraciones teóricas bastante finas, se presentó más adelante al constatar que la potencia de las máquinas no podría aumentar más allá de un cierto punto, y así surgieron nuevas técnicas de aprovechamiento de la fuerza motriz del vapor, por lo general mediante la adición de cilindros y pistones trabajando a diferentes temperaturas. A finales del siglo XIX, y a pesar de que se continuó trabajando en locomotoras de vapor hasta los años 1950, los límites prácticos ya se habían alcanzado tiempo atrás.

Para comparar, los equivalentes actuales del regulador centrífugo, escondidos en circuitos electrónicos que controlan casi cualquier cosa en nuestros días, proveen respuestas en ínfimas fracciones de segundo. Solemos dar por buenos sus efectos cuando se trata de optimizar una mezcla de combustible o de ajustar la suspensión de un automóvil, pero casi seguro que no aceptamos con tanto entusiasmo las respuestas instantáneas de los mercados de valores a cualquier rumor, o las fluctuaciones automatizadas de los cambios de moneda, otra forma de especulación y *modus vivendi* de más de un desaprensivo, institucional o no. Consideren Uds por un momento que los cambios entre las monedas importantes fluctúan a intervalos brevísimos, y las órdenes

[13]Una lectura muy amena e interesante es la recién reeditada historia (2013) de las máquinas de vapor publicada en 1901 por Conrad Matschoss: *Geschichte der Dampfmaschine*, Severus Verlag, Hamburg.

[14]Fernández, Isabel; Pacheco, José M. (2005) On the role of Engineering in mathematical development, *European Journal of Engineering Education* 30(1), 81-90.

de compra-venta de divisas han de seguir tales variaciones a ritmos semejantes. La tentación de automatizar todo el proceso, especialmente para aprovechar sus fases favorables, es desde luego grande.[15]

Un extraño árbol genealógico

Para el público en general, los aspectos más abstractos –y por tanto en apariencia los más inútiles– de las Matemáticas van ligados a la Teoría de Conjuntos, uno de los intentos de justificación de las Matemáticas más próximos a nuestra época. Como es bien conocido, durante largos años, en la segunda mitad del siglo XX, se intentó basar la educación matemática en versiones simplificadas de esta teoría, con el desastroso resultado que muchos hemos conocido.[16] Exagerando un poco, tal pretensión sería comparable a que para conducir un automóvil se necesitara comprender la minería del hierro, porque muchas partes del vehículo se fabrican a partir de ese metal. Sin embargo ¿quién diría que esa abstractísima Teoría de Conjuntos resulta ser nieta de la máquina de vapor?

De nuevo, la historia pasa por la Física, y más en particular por la Termodinámica. Dije hace un momento que perfeccionar las máquinas de vapor, así como comprender mejor su funcionamiento, condujo a plantearse la naturaleza del calor, cómo se transfiere y cómo tratar de maximizar el rendimiento de los aparatos basados en su uso. Las obras pioneras en este campo son la conocida memoria de 1822 *Théorie analytique de la chaleur,* debida a Jean-Baptiste Fourier, y el breve tratado de Sadi Carnot *Réflexions sur la puissance motrice du feu*, de 1824.[17]

Ambos textos son perfectamente legibles en nuestros días, explican principios físicos tales como que el calor fluye de los cuerpos calientes a los fríos, que la velocidad de ese traspaso depende de las sustancias que los conforman, que las transformaciones de energía siguen ciertos ciclos según se mantenga una u otra variable fija, etc. El primero de ellos viene con sus observaciones, tablas y gráficas, lo que corresponde al primer paso de la escala de Weyl. Por tanto, fijándonos ya en los aspectos matemáticos, sabemos que un conjunto de simplificaciones e hipótesis *ad hoc* nos conduce a aquel problema clásico de los cursos universitarios, consistente en el cálculo de la evolución temporal de la temperatura a lo largo de una varilla o barra metálica sobre la cual se ha observado inicialmente una distribución longitudinal de temperatura, y suponiendo además que los únicos puntos donde es posible el intercambio de calor entre ella y su exterior son sus extremos.[18]

Pues bien, hemos alcanzado ya el segundo escalón, donde el problema quedará descrito por un

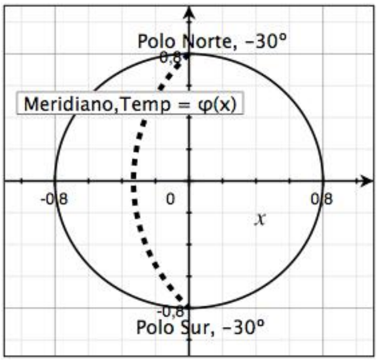
[15] Un estudio reciente sobre estas cuestiones, contando variaciones de las tasas de cambio a intervalos de 5 minutos: Zhang G, Zhang Q, Majeed T (2013) Exchange rate determination and forecasting: Can the microstructure approach rescue us from the exchange rate disparity? *ISRN Economics 2013.* Article ID 724259 (12 pp) .

[16] Un libro, muy famoso cuando se publicó, y que aún mantiene su interés: Kline, Morrris (1976) *El fracaso de la matemática moderna*, Editorial Siglo XXI, Madrid y México.

[17] Existe una traducción española de 1987, publicada por Alianza Editorial, a cargo de Javier Ordóñez.

[18] Todos hemos visto los gruesos aislantes que protegen las cañerías exteriores de muchos sistemas de calefacción o refrigeración. El problema citado es una abstracción de situaciones como ésas.

grupo de expresiones matemáticas: Una representará la dinámica de la variación de temperatura, esto es, que el calor fluye de las zonas calientes hacia las frías teniendo en cuenta las propiedades de la sustancia que conforma la barra, otra informa de la distribución inicial de temperatura, y otras más indican el comportamiento térmico en los extremos de la varilla.
Si ambos extremos se mantuviesen en cubos de hielo fundente, lo esperable sería que a largo plazo la barra terminase toda a la gélida temperatura de sus extremos. Nótese que en principio toda la varilla podría hallarse inicialmente a algunos grados bajo cero, luego la temperatura final sería el resultado de un calentamiento. De manera semejante, con los extremos bien aislados, la temperatura final acabaría siendo globalmente igual al promedio de la distribución inicial, y así sucesivamente: Pues bien, la abstracción matemática confirma todas esas predicciones intuitivas.
Para comprender la importancia de algo tan esquemático, les recordaré que los modelos conceptuales más teóricos para el estudio de las variaciones climáticas, problema bien candente en nuestros días, parten de una variante del mismo: Es fácil reconocer que el clima presenta más variabilidad a lo largo de un meridiano que de un paralelo, luego es razonable simplificar la cuestión suponiendo simetría rotacional alrededor del eje terrestre, con lo cual un problema inicialmente bidimensional se transformará en otro unidimensional.



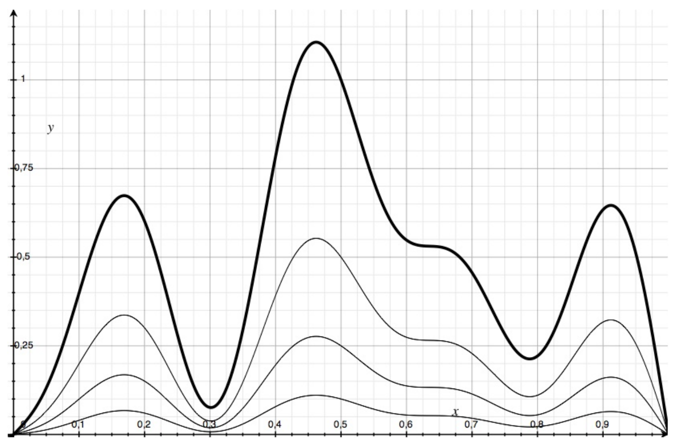
Budyko-Sellers: distribución de temperatura $\phi(x)$ sobre medio meridiano .

Para un matemático, resulta casi obvio considerar que la distribución de temperatura –valores medios calculados sobre intervalos de unos 30 años– a lo largo de un medio meridiano, de polo a polo, podría representarse mediante la analogía de la barra. Acordemos, pues, que en ambos polos se disfruta permanentemente de una agradable temperatura media de, pongamos, -30 grados Celsius. Como la Tierra se halla sometida a la radiación solar, y también irradia hacia el espacio, estando limitada tal irradiación por las nubes y otros componentes atmosféricos, añadiremos a la ecuación dinámica un término para describir ese balance, lo que introduce un mecanismo físico[19] que impedirá a la Tierra –con sus habitantes– congelarse a treinta grados bajo cero, consiguiéndose así, al menos en un marco teórico, una representación del clima de la esfera terrestre: se trata de la familia de modelos conocidos con los nombres de Budyko y Sellers.[20]

[19]Se trata en esencia del conocido “efecto invernadero”

[20]Pueden verse los trabajos de Budyko y de Sellers –por otra parte independientes– recogidos en: Archer,

Llegados a este punto, se podría ya pasar sin más al cuarto escalón, trasladando a ingenieros y técnicos los resultados obtenidos. Pero el pensar matemático es más tozudo: No basta con lo hecho, hay que ir más allá, alejarse e incluso renegar de los orígenes empíricos, obviar de momento ese cuarto paso y explorar nuevas vías hacia y en el tercer peldaño de Weyl.
Recordemos por un momento la barra y sus extremos helados. Para el matemático, hallar una solución del problema consiste en encontrar a partir de la distribución inicial de temperatura una familia de distribuciones longitudinales, de amplitud decreciente a lo largo del tiempo, pero siempre con valor 0 en los extremos. La idea genial, origen de la solución, fue muy simple: Suponer que el cambio de la *forma* de la distribución a lo largo del tiempo consiste sólo en una disminución de amplitud, y presentar el resultado final como la función de forma, modulada por una ley temporal de variación, deducida de la experiencia física. El resultado sería evidentemente el *producto* de la forma y de la ley de variación. Pero para un matemático, estar tan cerca de la experiencia puede resultar un tanto arduo, así que deberé solicitar ahora su benevolencia por dejar que se presente ante nosotros la temida simbología matemática a la que tantos quebraderos de cabeza adjudicaba el novelista Sabato, quien, por otro lado era Doctor en Física y fue profesor de Mecánica cuántica.



Una distribución inicial de temperatura (línea gruesa) sobre una varilla de longitud $L = 1$, y sucesivas etapas de su evolución en el tiempo hacia 0.

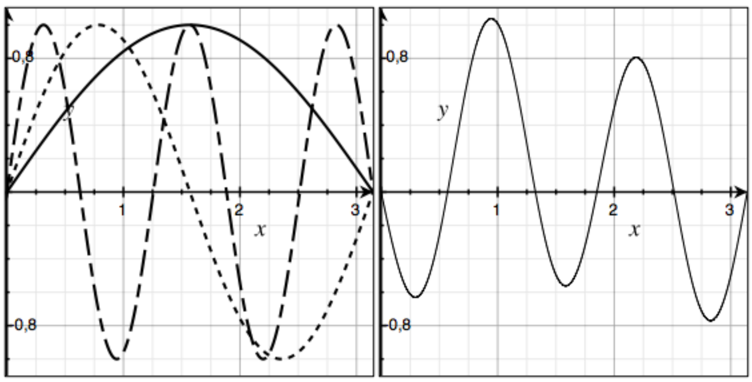
Existen algunas formas especiales, determinadas por las condiciones en los extremos, de la distribución inicial de temperatura sobre la barra que permiten resolver automáticamente la cuestión. Multiplicando tales formas, digamos que se llaman $f_n(x)$, cada una por su correspondiente ley de evolución temporal se obtienen de manera inmediata soluciones particulares del problema, que escribimos como $F_n(x,t) = f_n(x)g_n(t)$. Claro está, si la forma $\phi(x)$ de nuestro caso concreto no pertenece a ese catálogo, algo habrá que hacer: Si se eligió una dinámica lineal, como es el caso en las lecciones elementales y en bastantes aplicaciones ingenieriles, es posible pensar en generar una solución en forma de suma ponderada $\sum a_n F_n(x)$ de esas soluciones

David; Pierrehumbert, Raymond (eds.) (2010) *The warming papers: the scientific foundations for the climate change forecasting*, Wiley-Blackwell, New York. Una exposición mucho más literaria se halla en: Edwards, Paul N. (2010) *A vast machine*, Princeton University Press, Cambridge, Massachussets. También: Roulstone, Ian; Norbury, John (2013) *Invisible in the Storm: The role of Mathematics in understanding weather.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

originarias, donde los coeficientes desconocidos a_n se ajustarán adecuadamente a partir de la forma inicial $\phi(x)$. Con alguna habilidad técnica más, se calculan con expresiones, por cuya misteriosa aparición les ruego excusas:[21]

$$a_n = \int_0^L \phi(x) f_n(x) dx$$

Acabamos de acceder al tercer escalón. A partir de ahora, el matemático se dedicará a escudriñar en estas fórmulas, por lo que su interés se volverá hacia las propiedades o cualidades matemáticas de ϕ y de las f_n, ya despojadas de su vinculación con cualquier hecho físico, aunque como guía siga teniéndolos presentes de tapadillo. Por ejemplo, en el caso de las temperaturas de la varilla con los extremos helados, la función de forma $\phi(x)$, además de anularse en los extremos ha de ser continua para tener sentido físico, al menos desde un punto de vista intuitivo. Los componentes de la familia f_n no plantearán problemas al matemático, pues en su lejano origen empírico se eligieron para representar comportamientos razonables, y tras algunas operaciones, veremos que el cálculo de la solución va a quedar pendiente sólo de si la expresión $\int_0^L \phi(x)dx$ tiene sentido o no. La locución *tener sentido* significa que tras realizar de manera algorítmica las operaciones necesarias, es posible asignar unívocamente un valor numérico finito a la expresión integral. En jerga más técnica, se trata de averiguar si la $\phi(x)$ es *integrable sobre el intervalo* $[0, L]$.



Izquierda: tres funciones de forma ($\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 5x$) que originan soluciones inmediatas al problema de la varilla, aquí representada por el intervalo $[0, \pi]$. Derecha: Una suma ponderada de las tres anteriores en el mismo intervalo. Nótese cómo todas ellas son nulas en los extremos del intervalo, y por haber supuesto linealidad, la suma ponderada también lo es.

En los cursos elementales de Matemáticas se estudian muchas variantes de tal proceso –el conocido cálculo de integrales definidas– con unas reglas precisas, y también se avisa de que en la práctica son muy pocas las que pueden obtenerse así, culpándose de esa escasez a aquel antiguo terror de estudiantes conocido como cálculo de primitivas o integrales indefinidas, donde deberíamos haber aprendido –pero en genera, no– que la integral indefinida es la operación inversa de la diferenciación, o dicho de otra forma, lo que se integra son diferenciales, no

[21] En la Nota 2 se ofrece un desarrollo algo más detallado.

funciones. Incluso el símbolo $\int$ es en su origen la inicial de *summa*, al igual que la letra d lo es de *differentialis*.[22]

Así las cosas, todo dependerá sólo de las propiedades matemáticas de la función ϕ, representativa de nuestra ya casi olvidada distribución inicial de temperatura. El algoritmo presentado a principios del siglo XIX por Augustin Cauchy permite el cálculo para una clase de funciones no muy extensa técnicamente amente hablando, aunque suficiente para la mayor parte de las aplicaciones clásicas a la Física.[23]Desde luego, para el problema del calor en la varilla es suficiente, pues en el mundo real se puede suponer que la temperatura sólo admite variaciones continuas, cosa cierta a las escalas macroscópicas habituales. La variante introducida por Bernhard Riemann[24] cuarenta años más tarde, para calcular los coeficientes a_n amplió el campo de las funciones integrables, lo cual permitía resolver problemas donde la función de forma inicial tuviera alguna discontinuidad –ya no eran problemas tan físicamente consistentes, pero sí retos para los matemáticos. En todo caso, desde tan lejanos tiempos se sabe que si la diferencial que deseamos integrar está determinada por una función continua, es posible hallar el valor numérico de la integral definida incluso sin disponer de una primitiva: por ejemplo, la diferencial $\cos(x^2)dx$, que aparece en la Óptica de Fresnel, carece de primitiva... También nos enseñaban a calcular integrales definidas de algunas funciones no continuas, las que lo son a intervalos, y se nos avisaba de que el tipo de discontinuidad podría ser determinante para la existencia o no de la expresión integral, incluso se nos ponía en guardia: si los puntos donde la función dejaba de ser continua eran "muchos", habría problemas serios. No podíamos imaginar cuánto.

Podemos trazar ya un esbozo del árbol genealógico para la Teoría de Conjuntos: un problema técnico, originado por una clase de máquinas, da paso a toda una ciencia, la Termodinámica, donde encontramos una formulación matemática debida a Fourier, de la cual se sigue el estudio de la posibilidad del cómputo de ciertas integrales, y resultando finalmente que el punto crucial del cálculo se encuentra en... ¡el totalmente abstracto mundo de la estructura de los conjuntos de puntos de discontinuidad de una función!

En la segunda mitad del XIX se desató una verdadera caza en busca de funciones raras o exóticas, definidoras de diferenciales que no admitieran integración con los viejos algoritmos de Cauchy y Riemann. Se encontraron muchísimas, todas ellas con *infinitas discontinuidades* en el intervalo de integración, y como era de esperar, de inmediato la atención de los matemáticos derivó hacia tales conjuntos infinitos de discontinuidades. Y como no podía ser menos, con no menor rapidez se trasladó casi de inmediato al estudio *per se* de los conjuntos infinitos, que tanto estorbaban para las aplicaciones. Ya no era sólo cuestión de que hubiera infinitos elementos en tales conjuntos, cosa ya de por sí de difícil comprensión a todo lo largo de la historia de las Matemáticas, sino además de explorar y llegar a conocer sus posibles estructuras internas.

[22]Puede verse un ejemplo en la Nota 3.

[23]Se halla, faltaría más, en el archifamoso tratado: Cauchy, Augustin (1821) *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique,* L'Imprimerie Royale, Paris.

[24]Riemann, Bernhard (1868) Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe, *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* 13, 87-131.

En su formulación original, el grueso de la Teoría de Conjuntos se dedicó a analizar la posición relativa de los componentes del conjunto, de si estaban aislados o se acumulaban de alguna forma, pues de su distribución dependía la aplicabilidad o no de los nuevos algoritmos más generales que permitían asignar un único número a la expresión integral, cerrando así el ciclo cultural iniciado por la máquina de vapor. La historia nos muestra a Georg Cantor y Felix Hausdorff estableciendo la Teoría de los conjuntos infinitos entre 1870 y 1920[25], a Henri Lebesgue y René Baire, y a otros muchos aplicándola o criticándola severamente, generando así un cuerpo de doctrina matemática cuya profundidad es insondable, y su riqueza, incalculable.[26] Y por si no lo supieran, deberían Uds saber que los algoritmos mediante los cuales las impresoras actuales consiguen esas vívidas representaciones fotográficas que tanto nos asombran, derivan directamente de las propiedades de aquellas extrañas funciones.
En fin, todo por un poco de agua hirviendo.

4 Leer integrales

Análisis, síntesis

Pero volvamos a la vida diaria. Entre los objetos matemáticos que más asustan al profano están sin duda las integrales, aunque ya señalé antes que no son sino sumas disfrazadas. No hay que tenerles miedo: Hace un momento apareció fugazmente la expresión

$$a_n = \int_0^L \phi(x) f_n(x) dx$$

que resulta ser un caso particular de las fórmulas conocidas como *transformadas integrales*, campo favorito del Profesor Nácere Hayek, promotor y primer presidente de esta Academia. El mundo de las transformadas es fascinante y presenta conexiones insólitas con la vida cotidiana. Recuerden, antes cité la tomografía, hoy día tan común en nuestros hospitales: pues bien, los resultados de Radon en los que descansa su teoría están condensados en una transformada integral.[27] En lo que resta me permitiré abusar un poco más de su paciencia para con la simbología matemática. La expresión general de una transformada integral lineal es:[28]

$$\hat{\phi}(s) = \int_a^b K(x,s)\phi(x) dx, \ s \in \mathbb{R}$$

la cual , cuando $f_n = e^{inx}$, $L = \pi$, queda como

[25] Véase el monumental texto: Hausdorff, Felix (1914) *Grundzüge der Mengenlehre*, Teubner, Leipzig.

[26] Véase el muy clásico tratado: Baire, René (1905) *Léçons sur les fonctions discontinues,* Gauthier-Villars, Paris.

[27] Radon J (1917) Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, *Berichte der Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften* (*Leipzig*), Math.-Nat. Klasse 69, 262-277. El larguísimo nombre de las actas de las sesiones de la Academia de Sajonia se conocía abreviadamente como *Leipziger Berichte* (informes de Leipzig).

[28] La Nota 4 contiene información en un lenguaje un poco más técnico.

$$a_n = \int_0^{\pi} e^{inx}\phi(x)dx,\; n \in \mathbb{Z}$$

representativa del cálculo de los coeficientes de una serie de Fourier, pero con coeficientes complejos. Esta excursión al misterioso mundo de los números complejos es un ejemplo muy común del pensar matemático: Aunque parezca difícil de aceptar en un principio, con algún entrenamiento suele resultar más fácil comprender asuntos complicados desde un nivel superior de abstracción. La última fórmula nos dice que a partir de la función o conjunto de datos original ϕ, y dados los $f_n(x) = e^{inx}$, conocidos como *armónicos*, es posible obtener una familia ordenada o sucesión de números: $\{a_n\}$, lo cual sugiere una representación formal o *análisis espectral* –hablando sin mucho rigor, el espectro de ϕ son los números a_n:

$$\phi(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$$

donde el símbolo $\sim$ indica que a través de los e^{inx} se establece una cierta asociación entre los a_n y su origen $\phi(x)$. Nótense aquí los extremos infinitos de la sumación. En la primera aparición de los números a_n con motivo de la ecuación del calor no se especificó si iban a ser muchos o pocos los sumandos, pero ahora ya sabemos que salvo en situaciones muy especiales, la teoría nos indica que siempre hará falta una infinidad de ellos para obtener una representación completa.[29]

En Física e Ingeniería es corriente denominar *señal* a la $\phi(x)$, en especial en aplicaciones a la transmisión de información, y en la práctica se trabaja con señales casi siempre a través de sus espectros.[30] También es una herramienta habitual en Estadística, tanto teórica como aplicada a las más diversas cuestiones. Matemáticamente, y para no bajar del tercer escalón de Weyl, podemos plantearnos algunas preguntas interesantes.

¿Se puede sustituir el símbolo $\sim$ por el $=$? La respuesta es el núcleo de los cursos universitarios elementales de análisis de Fourier, y es que no siempre es posible. Como ya sospechábamos desde la presentación de la antediluviana máquina de vapor, se trata de decidir sobre propiedades de la señal ϕ, esto es, una vez seleccionada una clase adecuada de señales elementales o armónicos, averiguar cuánto y en qué sentido se parecen la señal y su análisis espectral, o al menos una parte sustancial y finita de éste. En este último caso, la parte conservada se conoce como "compresión" de la señal inicial dada por un subconjunto finito de los números $\{a_n\}$. En palabras más técnicas, si al estudiar la representación completa, ésta no se reduce por alguna consideración física a un número finito de sumandos, entonces estaremos tratando de establecer algunas *propiedades asintóticas* del análisis espectral.

¿Si se pudiera sustituir $\sim$ por $=$, qué significaría exactamente el signo igual? He aquí otro

[29]La denominación *armónicos* apunta a la teoría de la Música, donde el número de ellos que se utiliza en la representación espectral se conoce como *timbre*.

[30]Un texto muy ameno sobre estas cuestiones es: Nahin, Paul (2006) *Dr. Euler's fabulous formula*, Princeton University Press, Cambridge, Massachussets.

problema típico de la Matemática pura: Decidir cuándo dos entes se consideran iguales. Prescindiré de filosofar en este momento acerca de qué es en realidad el símbolo = y cuál pueda ser su significado más allá de la intuición habitual, pues la Filosofía de las Matemáticas se ocupa extensamente de tales cuestiones.[31] El comentario anterior nos lleva de modo natural, –al menos para los aficionados a las Matemáticas– a la siguiente cuestión, de carácter al parecer mucho más cotidiano:

¿Cuándo es posible la "reconstrucción" o *síntesis espectral* $\{a_n\} \to \phi$?, y ¿con qué calidad? A primera vista aparenta ser más fácil de entender, pues ¿quién no ha oído hablar, en relación con la Música, o con los mensajes emitidos por muchas máquinas expendedoras, de sintetizadores y voces sintéticas? En efecto, lo que generan esos aparatos son síntesis espectrales de alguna selección de los armónicos e^{inx}, modulados en amplitud –volumen sonoro– por el ejecutante o el progamador, y desde un punto de vista abstracto se tratará de justificar la inversión de la transformada $\phi \to \hat{\phi}$, esto es, cómo recuperar de la señal ϕ a partir de $\hat{\phi}$. Las técnicas usadas no son en absoluto elementales y constituyen un extenso campo dentro del Análisis Matemático. Por si aún albergaran dudas acerca de la utilidad de esas abstracciones, piensen por un momento en los omnipresentes códigos de barras o sus versiones bidimensionales: su lectura mediante un sensor es un proceso de análisis, y su traducción a algo inteligible para nuestros sentidos, lo que se ve en la pantalla de un terminal, una síntesis.

Para ir terminando, nada más real y humano que la avidez de poseer bienes, dinero, poder. También hay Matemáticas para eso, y además muy ligadas con lo que acabo de contarles.

Matemáticas de la codicia

Un poco más arriba, al comentar los cambios monetarios, se presentó el fantasma de la codicia humana. Por supuesto, se trata de un tema siempre de actualidad. Un célebre artículo del ecologista *avant la lettre* Garrett Hardin, titulado *The tragedy of the commons,* es un clásico desde hace bastantes años.[32] No contiene una sola expresión matemática, pero sí alude a nuestra ciencia más de una vez como herramienta necesaria para comprender los mecanismos de la codicia. Para ir a un terreno familiar, he aquí la conocidísima transformación integral de Laplace, cuyo aspecto –ya no debería infundirles miedo alguno– es:

$$\hat{\phi}(s) = \int_0^\infty e^{-xs}\phi(x)dx$$

Los ingenieros la consideran una potente herramienta de cálculo simbólico, en muchos puntos análoga al del cálculo logarítmico. Por otro lado, un matemático tenderá a explorar –igual que hizo antes con la resolución del problema del calor– las condiciones que den sentido a la expresión integral, para que el nuevo objeto $\hat{\phi}$ posea propiedades interesantes y aprovechables. El resultado básico en esta línea no es difícil de obtener y suele –más bien, solía– ser materia habitual de los cursos de Análisis Matemático. Dice, en pocas líneas, que la integral tendrá

[31] Consúltese, p.ej., la recopilación de contribuciones: Manin, Yuri (2007) *Mathematics as metaphor*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

[32] Hardin, Garrett (1968) The tragedy of the commons, *Science* 162, 1243-1248.

sentido cuando la amplitud de la señal ϕ no crezca demasiado rápidamente, y por tanto la exponencial decreciente e^{-xs} domine sobre ella, en cuyo caso el integrando tenderá a anularse con la rapidez necesaria para que la integral resulte convergente.

Pero veamos ya la lectura de un negociante, o peor aún, de un especulador sin escrúpulos. Conviene cambiar ligeramente la notación y explicarla con algún detalle, pues en Economía es habitual reescribir la integral con unas nuevas variables así: $s \to \delta$, $\phi(x) \to p(t)$, $x \to t$. Ahora quedará

$$V_\delta = \int_0^\infty e^{-t\delta} p(t) dt$$

La fórmula representa cuál es el beneficio total V_δ que se obtendría al explotar un yacimiento minero, una pesquería, o algo semejante, pero susceptible de agotarse, cuando se dispone o se cree disponer de una estimación de la evolución del beneficio instantáneo neto $p(t)$ –ingresos menos gastos– de la producción a lo largo del tiempo y bajo la hipótesis o tiranía de una tasa de descuento δ, versión técnica del conocido dicho "más vale pájaro en mano..."[33] En la vida real el tiempo disponible no es infinito, sino limitado, y una vez fijada la tasa de descuento quedará, para algún T adecuado, la expresión:

$$V = V_\delta(T) = \int_0^T e^{-t\delta} p(t) dt$$

Ofrezcamos un análisis elemental: Si la tasa no fuera grande, V podría obtenerse procurando mantener el beneficio $p(t)$ más o menos constante, equilibrando gastos y ganancias durante el tiempo T de vigencia de la explotación. Pero cuando se es codicioso, no es posible esperar mucho, de manera que T pasa a ser $T' < T$. Si nos aseguramos (¿cómo?) de mantener pequeña la tasa de descuento, la tentación es fácil de comprender: aumentando la producción y reduciendo los gastos, el valor de $p(t)$ se mantendrá alto durante el intervalo T'; que eso lleve a esquilmar o liquidar la explotación, o a condiciones de trabajo lamentables, es un problema diferente, aunque no por ello despreciable, como bien saben economistas, ecólogos y ambientólogos. Por otra parte, si la tasa de descuento se mantuviera elevada –esto es, el valor de lo producido fuera poco relevante más allá del corto plazo– casi cualquiera se volvería codicioso de inmediato, y concentraría la actividad en el menor tiempo posible, con el mismo resultado de antes. En breve: ¡la tasa de descuento δ es una firme candidata a culpable de todos los males! El trabajo clásico sobre esta cuestión se debe a Harold Hotelling[34], y constituye el punto de partida en un campo permanente de investigación interdisciplinaria, pero en este lenguaje, cualquier iniciativa acerca del tan traído y llevado concepto de sostenibilidad pasa inexorablemente por el escrutinio de la transformada de Laplace. Para que luego digan que la abstracción no tiene parentesco alguno con la vida real.[35]

[33] Así, en estricta teoría, quien quisiera comprar la explotación debería pagar por lo menos la cantidad V_δ para hacerse con ella, esto es, el hipotético beneficio futuro sirve como estimación o incluso definición del valor de la empresa explotadora.

[34] Hotelling, Harold (1931) The Economics of exhaustible resources, *Journal of Political Economy* 39(2), 137-175.

[35] Un ejemplo reciente: Cairns, Robert D. (2012) *The green paradox and the misapplication of the Economics of exhaustible resources*, McGill University, Montreal, Canada.

5 A modo de final

Desearía concluir habiendo tenido la satisfacción de despertar en Uds una cierta curiosidad. Para quienes las Matemáticas sean algo familiar, he intentado presentar algunos aspectos que no se comentan con frecuencia; para aquellos menos versados, al menos he tratado de mostrar unas relaciones con la vida real que no estén tan lejos de lo cotidiano. Espero no haber pecado de ambicioso con esta decisión, aunque creo que Uds sabrían perdonarlo si así lo considerasen.
He procurado transmitir un mensaje que destaque la unidad metodológica de las Matemáticas, enfrentadas a la enorme diversidad de la vida real, de modo que al acercarnos a las Matemáticas, ya sea como estudiosos de ellas en sí o necesitados de su auxilio para otras actividades, comprendamos que los verdaderos progresos en esta ciencia pasan siempre por excursiones a las cumbres de la abstracción más pura, desde donde poder contemplar, como a vista de pájaro, vías y caminos semiocultos en la complejidad de la experiencia de los sentidos.
Creo, además, que la Academia es un lugar o foro adecuado para tales reflexiones, como punto de encuentro de diferentes corrientes de pensamiento, propicio a intercambios y a la generación de debates y opiniones que contribuirán sin duda a mejorar el estado cultural de la sociedad que nos rodea, nos acoge, y a la que hemos de servir con nuestras aportaciones intelectuales, liberadas de la tiranía de las modas del momento, que atenazan con inimaginable estupidez la función cultural y crítica que debería prevalecer en nuestras aulas, seminarios y reuniones científicas, privándonos de buena parte de la verdadera alegría de vivir que con tanta belleza describen las palabras de Schiller en la *Oda a la alegría* de 1802:[36]

> "Tu encanto une aquello que la moda separa,
> la caricia de tu suave ala, a los hombres hermana."

6 Notas

Nota 1

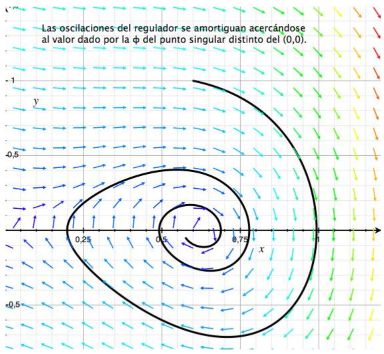
Un regulador centrífugo clásico consiste en una palanca –dos es más habitual, como en la fotografía de más arriba– terminada en un peso, articulada solidariamente por el otro extremo a un eje giratorio, movido por la propia máquina mediante una transmisión adecuada. En reposo, la palanca se halla en posición (casi) vertical. Al girar el eje la acción de la fuerza centrífuga eleva el peso de manera que el ángulo entre la palanca y el vástago del eje varía, y al alcanzar un cierto valor, permite actuar a través de una varilla u otro sistema sobre una válvula que regula el paso del vapor hacia el cilindro.
La mejora de la calidad del movimiento debida al regulador fue determinante para poder situar la máquina en posición horizontal y aplicar el vapor alternativamente sobre ambas caras del pistón para conseguir un movimiento muy uniforme, lo que abrió el camino a las máquinas de vapor como motores de vehículos, aunque las primeras locomotoras aún usaban un cilindro

[36]"Deine Zauber binden wieder, was die Mode streng geteilt / alle Menschen werden Brüder, wo dein sanfter Flügel weilt."

vertical. El análisis matemático del regulador de Watt es un ejercicio fascinante[37], que presento aquí de modo sumario.
Si $\varphi(t)$ es el ángulo entre el eje y la palanca, una ecuación simple para describir la variación del ángulo con la velocidad de giro del eje es:

$$\varphi'' + g \sin\varphi + F\varphi' = (r\omega)^2 \sin\varphi \cos\varphi$$

Los dos primeros términos de la izquierda nos hablan de un péndulo físico, y el tercero da cuenta del rozamiento en la articulación de la palanca con el eje giratorio. Por último, el segundo miembro contiene el hecho de que la velocidad angular del regulador, descrita por la expresión $r\omega$, es proporcional a la del eje principal de la máquina, proporcionando el forzamiento que eleva el peso usando la fuerza centrífuga. El análisis muestra que, en efecto, es necesario un cierto régimen inicial de giro para que el regulador comience a trabajar, y que a largo plazo la máquina tiende a funcionar en régimen estable:



Amplitud de las oscilaciones del regulador de Watt en torno al punto de equilibrio distinto del origen: Obsérvese cómo tiende hacia 0. En abscisas, ϕ (ángulo), en ordenadas, ϕ' (velocidad angular).

Nota 2

El problema de las ecuaciones del calor, en la versión sencilla de la barra metálica como banco de pruebas, se puede escribir como sigue, siendo $u(x,t)$ la temperatura en el lugar $x \in (0, L)$ y en el momento de tiempo t. El intervalo real $[0, L]$ es la imagen mental de la barra, y $t \in (0, \infty)$:

- Ecuación del calor: $\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t)$. Aquí F representa los posibles aportes externos de calor a lo largo de la barra. Cuando es nulo, como en el ejemplo desarrollado en el texto, la ecuación se llama homogénea. Por su parte el término "de difusión" $k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ es la forma más simple de una expresión más general, $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial x}(ku))$, cuando el coeficiente de difusión k es constante. Aún más, $\frac{\partial u}{\partial t}$ es también el caso más simplificado posible, pues en general vendría acompañado del término suplementario $v\frac{\partial u}{\partial x}$ representativo del efecto de alguna clase de movimiento interno, o "advección" con velocidad v, de la sustancia constituyente de la barra, que también arrastrase consigo el calor. El caso aludido en el

[37]Una exposición muy detallada y clara puede verse en: Pontriaguine, Lev (1969) *Équations différentielles ordinaires*, Editorial Mir, Moscú.

texto contempla, por tanto, sólo la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, acompañada de las condiciones siguientes:

- Condición inicial, $u(x,0) = \phi(x)$.
- Condiciones en los extremos: C_0 y C_L. El caso de los extremos helados será: $C_0 \equiv u(0,t) = 0$ y $C_L \equiv u(L,t) = 0$.

La solución proporcionará la forma que suponemos va a tener la distribución de temperatura sobre la varilla en cada instante y lugar. En principio, una distribución con forma de función periódica nula en 0 y en L podría servirnos de punto de partida, por ejemplo, alguna variante de $\sin x$ tal como $\sin\frac{\pi x}{L}$ iría bien. Si se deja evolucionar esa forma espacial, multiplicándola por una función decreciente del tiempo $g_n(t)$, trasunto de alguna constatación experimental, se obtendrá el previsto comportamiento asintóticamente nulo. Sin embargo, el problema aún no está resuelto en general, porque en el inicio del tiempo del estudio, la función elegida debería coincidir con la distribución de partida, que no tiene por qué ser de la forma seleccionada, pues ¡no hay que olvidar, a pesar de todo, los orígenes físicos de la cuestión!
También esto tiene remedio: En lugar de usar sólo una función de forma, un matemático propondrá una *suma ponderada* de ellas, sabiendo, por ejemplo, que de $f(x) = \sin\frac{\pi x}{L}$ descienden $f_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}$, que satisfacen todas el valor prefijado en los extremos. Si se eligen los pesos o coeficientes con buen juicio, la suma representará la verdadera forma inicial, y a partir de ahí, todo fluirá. Condensado todo en una fórmula, si $u(x,t)$ es la temperatura calculada para la posición x y el instante t, la solución del problema se presentará así:

$$u(x,t) = \sum a_n f_n(x) g_n(t)$$

Exigimos, como es natural, que las $g_n(0) = 1$ para que la distribución inicial sea

$$\phi(x) = u(x,0) = \sum a_n f_n(x)$$

y un momento de reflexión pondrá de relieve que la suma anterior tendrá en general un número infinito de sumandos, con lo que ahora hay dos problemas matemáticos nuevos: el cálculo de los coeficientes o ponderaciones a_n, y la cuestión de si la expresión calculada coincidirá de alguna manera con la condición inicial $\phi(x)$, en el sentido expuesto algo más arriba. De acuerdo con Fourier, los coeficientes dependerán tanto de la distribución inicial ϕ como de la familia f_n, y vienen dados por las integrales:

$$a_n = \int_0^L \phi(x) f_n(x) dx$$

La elección de la tasa de decrecimiento $g(t)$ y de las funciones de forma $f_n(x)$ se lleva a cabo por el método de la *separación de variables*, posible por la linealidad del problema. Consiste en suponer *a priori* que $u(x,t) = X(x)T(t)$, lo cual conduce de forma natural a una exponencial negativa para la g y a funciones trigonométricas elementales como las citadas antes para las f_n.[38]

Nota 3

He aquí un ejemplo de diferenciación-integración muy sencillo. Consideramos la sucesión de números enteros

$$\left\{n^2\right\}_{n\geq 0} = \{0, 1, 4, 9, 16, ...\}$$

Diferenciar esta sucesión es construir la nueva sucesión de diferencias entre sus términos:

$$d\left\{n^2\right\} = \left\{n^2 - (n-1)^2\right\}_{n>0} = \{1, 3, 5, 7, 9, ...\} = \{2n-1\}_{n>0}$$

Integrar la sucesión obtenida será escribir las sumas sucesivas de sus elementos:

$$\int d\left\{n^2\right\} = \{1, 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7, ...\} = \{1, 4, 9, 16, ...\}$$

añadiéndole un 0 al principio como "constante de integración".

Nota 4

Un breve inciso u observación, dedicado a no matemáticos pero aficionados a la abstracción. La ecuación numérica lineal más simple es $ax = b$, donde todos los símbolos representan elementos de un cuerpo numérico, y sabemos que se puede resolver en la forma $x = \frac{b}{a} = a^{-1}b$ siempre que $a \neq 0$. El Álgebra Lineal se dedica en esencia al estudio de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{b}$, cuya solución es $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ siempre que $|A| \neq 0$. La notación matricial es una representación compacta de un sistema, que aquí supondremos con tantas incógnitas como ecuaciones:

$$\sum_{j=0}^{n} a_{ij}x_j = b_i;\ i = 0, 1, ..., n$$

Ahora podemos cambiar de nuevo la notación: En lugar de a_{ij} y b_i escribiremos $a(i, j)$ y $b(i)$, y sustituiremos el sumatorio $\sum_j$ por su versión estilizada, la integral $\int dj$, poniendo de relieve que la variable de integración en una integral se corresponde con el índice de sumación en un sumatorio, lo cual dará como resultado:

$$\int_0^n a(i, j)b(i)dj$$

que presenta el aspecto de una transformada integral. El proceso seguido es un ejemplo de aplicación del *principio de permanencia de las leyes formales*, formulado por Hermann Hankel

[38] El tratamiento de este problema en Tijonov, Andrei; y Samarski, Alexander (1980) *Ecuaciones de la Física Matemática*, Editorial Mir, Moscú, es perfecto.

en 1867.[39] Por cierto, este autor es más conocido por una transformada integral que lleva su nombre, procedente del estudio de problemas con simetría radial. El principio es una de las herramientas más útiles del matemático, aunque debe ser utilizado con mucha precaución: Por ejemplo, entre números reales es indiferente escribir $x = a^{-1}b$ ó $x = ba^{-1}$, pero en el álgebra matricial no es cierto que $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ sea igual a $\vec{x} = \vec{b}A^{-1}$ debido a que en la generalización de números a matrices se pierde la propiedad conmutativa.

En la expresión general $\hat{\phi}(s) = \int_a^b K(x,s)\phi(x)dx$, $\phi(x)$ es una función, elegida entre las que posean las propiedades necesarias, $K(x,s)$ es el *núcleo* de la transformación y $\hat{\phi}$ es su transformada. Por regla general, el intervalo $[a,b]$ es $[0,\infty]$ o bien $[-\infty,\infty]$ y no es necesario restringirse al dominio de los números reales. Dado que el núcleo no depende de la propia ϕ, nos estamos restringiendo a problemas lineales.

La transformada más habitual es la clásica de Fourier –aunque existen muchísimas variantes– o versión continua del cálculo de los coeficientes del problema de la transmisión del calor:

$$\hat{\phi}(s) = \mathcal{F}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xsi}\phi(x)dx$$

donde reconocemos la interesante analogía entre $\phi \to \{a_n\}$ y $\phi \to \mathcal{F}$, con la peculiaridad geométrica de que el espectro es discreto si el intervalo es finito, y continuo si es infinito. Ya vimos que en el caso finito las funciones f_n se conocen como *armónicos* de f. Una pregunta que ya es célebre, relacionada con la ecuación de ondas bidimensional es ¿se puede reconocer la forma de la mebran o parche de un tambor a partir de su sonido?[40] La respuesta es negativa, y se corresponde con las dificultades teóricas de la síntesis espectral.

Por su parte, la transformada de Laplace tiene su lejano origen en el cálculo de probabilidades y es muy célebre por sus aplicaciones en Ingeniería:

$$\hat{\phi}(s) = \mathcal{L}(s) = \int_0^{\infty} e^{-xs}\phi(x)dx$$

Entre los estudiantes, el uso más habitual de la transformada de Laplace radica en una analogía con el cálculo logarítmico. Es sabido que con éste se puede traducir el cálculo de operaciones numéricas difíciles, p. ej. un producto, a otras más simples, dado que el logaritmo de un producto pasa a representarse por la suma de los logaritmos de los factores. De modo semejante, la mayoría de las transformadas integrales permiten realizar operaciones funcionales difíciles, p. ej. la derivación $\phi(x) \to \phi'(x)$ respecto de la variable original pasa a ser, en el caso de la transformación de Laplace, una simple multiplicación por la variable: $\hat{\phi}'(s) \to s\hat{\phi}(s)$ (hay algún detalle que no hace al caso aquí), y la integración estará, como es natural, representada por una división.

[39] Hankel, Hermann (1867) *Vorlesungen über die Complexen Zahlen und ihre Functionen*, Leipzig.

[40] Kac, Mark (1966) Can One Hear the Shape of a Drum?, *American Mathematical Monthly* 73(2), 1-23. Una referencia reciente es: Giraud, Olivier; y Thas, Koen (2010) Hearing shapes of drums – mathematical and physical aspects of isospectrality, *Reviews of Modern Physics* 82(3), 2213–2255.

Índice onomástico