

# Razonar las matemáticas

Del bachillerato a la universidad

# Índice general

|                                                   |           |
|---------------------------------------------------|-----------|
| <b>Prólogo</b>                                    | <b>7</b>  |
| <b>1 Miscelánea</b>                               | <b>9</b>  |
| <i>Jackie Harjani Sauco</i>                       |           |
| Ejercicio 1 .....                                 | 11        |
| Ejercicio 2 .....                                 | 11        |
| Ejercicio 3 .....                                 | 11        |
| Ejercicio 4 .....                                 | 13        |
| Ejercicio 5 .....                                 | 14        |
| Ejercicio 6 .....                                 | 15        |
| Ejercicio 7 .....                                 | 16        |
| Ejercicio 8 .....                                 | 17        |
| Ejercicio 9 .....                                 | 18        |
| Ejercicio 10 .....                                | 19        |
| Ejercicio 11 .....                                | 20        |
| Ejercicio 12 .....                                | 21        |
| Ejercicio 13 .....                                | 22        |
| Ejercicio 14 .....                                | 22        |
| Ejercicio 15 .....                                | 23        |
| Ejercicio 16 .....                                | 24        |
| <b>2 Números y Álgebra</b>                        | <b>27</b> |
| <i>Ángel Almeida Rodríguez, Belén López Brito</i> |           |
| Ejercicio 17 .....                                | 29        |
| Ejercicio 18 .....                                | 29        |
| Ejercicio 19 .....                                | 30        |
| Ejercicio 20 .....                                | 30        |
| Ejercicio 21 .....                                | 31        |
| Ejercicio 22 .....                                | 32        |
| Ejercicio 23 .....                                | 32        |
| Ejercicio 24 .....                                | 33        |
| Ejercicio 25 .....                                | 34        |

|                                                                                      |               |
|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| Ejercicio 26 .....                                                                   | 34            |
| Ejercicio 27 .....                                                                   | 34            |
| Ejercicio 28 .....                                                                   | 35            |
| Ejercicio 29 .....                                                                   | 36            |
| Ejercicio 30 .....                                                                   | 37            |
| Ejercicio 31 .....                                                                   | 38            |
| Ejercicio 32 .....                                                                   | 39            |
| Ejercicio 33 .....                                                                   | 40            |
| Ejercicio 34 .....                                                                   | 43            |
| Ejercicio 35 .....                                                                   | 48            |
| Ejercicio 36 .....                                                                   | 53            |
| Ejercicio 37 .....                                                                   | 54            |
| Ejercicio 38 .....                                                                   | 57            |
| Ejercicio 39 .....                                                                   | 58            |
| Ejercicio 40 .....                                                                   | 59            |
| <br><b>3 Análisis</b>                                                                | <br><b>63</b> |
| <i>Luis López García, Teresita del Niño Jesús Talavera Santana, José Vico Ibáñez</i> |               |
| Ejercicio 41 .....                                                                   | 65            |
| Ejercicio 42 .....                                                                   | 66            |
| Ejercicio 43 .....                                                                   | 68            |
| Ejercicio 44 .....                                                                   | 69            |
| Ejercicio 45 .....                                                                   | 71            |
| Ejercicio 46 .....                                                                   | 72            |
| Ejercicio 47 .....                                                                   | 74            |
| Ejercicio 48 .....                                                                   | 76            |
| Ejercicio 49 .....                                                                   | 77            |
| Ejercicio 50 .....                                                                   | 78            |
| Ejercicio 51 .....                                                                   | 79            |
| Ejercicio 52 .....                                                                   | 80            |
| Ejercicio 53 .....                                                                   | 81            |
| Ejercicio 54 .....                                                                   | 82            |
| Ejercicio 55 .....                                                                   | 85            |
| Ejercicio 56 .....                                                                   | 87            |
| Ejercicio 57 .....                                                                   | 87            |
| Ejercicio 58 .....                                                                   | 89            |
| Ejercicio 59 .....                                                                   | 90            |
| Ejercicio 60 .....                                                                   | 91            |
| Ejercicio 61 .....                                                                   | 93            |
| Ejercicio 62 .....                                                                   | 94            |
| Ejercicio 63 .....                                                                   | 96            |
| Ejercicio 64 .....                                                                   | 98            |

|                                                                                             |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Ejercicio 65 .....                                                                          | 99         |
| Ejercicio 66 .....                                                                          | 101        |
| Ejercicio 67 .....                                                                          | 102        |
| Ejercicio 68 .....                                                                          | 103        |
| <b>4 Geometría</b>                                                                          | <b>105</b> |
| <i>Josefa Caballero Mena</i>                                                                |            |
| Ejercicio 69 .....                                                                          | 107        |
| Ejercicio 70 .....                                                                          | 107        |
| Ejercicio 71 .....                                                                          | 109        |
| Ejercicio 72 .....                                                                          | 110        |
| Ejercicio 73 .....                                                                          | 111        |
| Ejercicio 74 .....                                                                          | 112        |
| Ejercicio 75 .....                                                                          | 113        |
| Ejercicio 76 .....                                                                          | 114        |
| Ejercicio 77 .....                                                                          | 117        |
| Ejercicio 78 .....                                                                          | 118        |
| Ejercicio 79 .....                                                                          | 119        |
| Ejercicio 80 .....                                                                          | 120        |
| Ejercicio 81 .....                                                                          | 122        |
| Ejercicio 82 .....                                                                          | 124        |
| Ejercicio 83 .....                                                                          | 126        |
| <b>5 Estadística y Probabilidad</b>                                                         | <b>129</b> |
| <i>Juan Ramón Rodríguez Santana, Ángelo Santana del Pino, Francisco Manuel Torres Pérez</i> |            |
| Ejercicio 85 .....                                                                          | 131        |
| Ejercicio 86 .....                                                                          | 131        |
| Ejercicio 87 .....                                                                          | 133        |
| Ejercicio 88 .....                                                                          | 136        |
| Ejercicio 89 .....                                                                          | 138        |
| Ejercicio 90 .....                                                                          | 139        |
| Ejercicio 91 .....                                                                          | 140        |
| Ejercicio 92 .....                                                                          | 141        |
| Ejercicio 93 .....                                                                          | 142        |
| Ejercicio 94 .....                                                                          | 143        |
| Ejercicio 95 .....                                                                          | 145        |
| Ejercicio 96 .....                                                                          | 146        |
| Ejercicio 97 .....                                                                          | 147        |
| Ejercicio 98 .....                                                                          | 149        |
| Ejercicio 99 .....                                                                          | 149        |
| Ejercicio 100 .....                                                                         | 151        |
| Ejercicio 101 .....                                                                         | 152        |

|                          |            |
|--------------------------|------------|
| Ejercicio 102 .....      | 155        |
| Ejercicio 103 .....      | 156        |
| Ejercicio 104 .....      | 158        |
| Ejercicio 105 .....      | 159        |
| Ejercicio 106 .....      | 160        |
| Ejercicio 107 .....      | 161        |
| Ejercicio 108 .....      | 163        |
| Ejercicio 109 .....      | 164        |
| Ejercicio 110 .....      | 165        |
| Ejercicio 111 .....      | 166        |
| Ejercicio 112 .....      | 167        |
| Ejercicio 113 .....      | 168        |
| Ejercicio 114 .....      | 169        |
| Ejercicio 115 .....      | 169        |
| Ejercicio 116 .....      | 170        |
| Ejercicio 117 .....      | 171        |
| Ejercicio 118 .....      | 172        |
| Ejercicio 119 .....      | 173        |
| Ejercicio 120 .....      | 174        |
| Ejercicio 121 .....      | 175        |
| Ejercicio 122 .....      | 176        |
| Ejercicio 123 .....      | 177        |
| Ejercicio 124 .....      | 177        |
| Ejercicio 125 .....      | 179        |
| Ejercicio 126 .....      | 180        |
| <b>Bibliografía</b>      | <b>183</b> |
| <b>Índice alfabético</b> | <b>185</b> |
| <b>Índice de figuras</b> | <b>189</b> |



## Prólogo

Actualmente, la Matemática es una de las disciplinas más demandadas laboralmente, y goza de gran reconocimiento. Desde nuestro punto de vista, su principal ventaja frente a otras es que potencia la abstracción, y esto hace que los conceptos adquiridos se puedan emplear en distintos y muy variados contextos.

El presente cuaderno es resultado del trabajo conjunto de profesores de enseñanzas medias y universitarias. Como docentes, hemos detectado un empobrecimiento general de los conceptos matemáticos adquiridos, lo que dificulta el aprendizaje a medida que se avanza por las distintas etapas educativas. Es destacable el caso de los alumnos de nuevo ingreso en la Universidad, sobre todo en las carreras de la rama de conocimiento de Ingeniería y Arquitectura.

En los últimos tiempos se ha puesto el foco en la resolución de ejercicios, descuidando en gran medida el rigor y la formalidad del lenguaje matemático. Creemos que la necesidad de escribir formalmente exige poner más atención a los conceptos empleados, y fomenta la actitud crítica. Teniendo en cuenta que los aspectos fundamentales de la educación matemática son el pensamiento, el razonamiento y la resolución de problemas, pretendemos establecer una colección de ejercicios que potencien todos estos aspectos.

El cuaderno cuenta con 126 ejercicios resueltos diferenciados por bloques y niveles de dificultad. Los bloques establecidos son: Miscelánea, Números y Álgebra, Análisis, Geometría y Estadística y Probabilidad. Cubren los contenidos usuales de Bachillerato y muchos de las actuales asignaturas de matemáticas de la Rama de Ingeniería y Arquitectura y de la Rama de Ciencias Sociales.

La matemática es una asignatura básica que se cursa en muchos Grados ofertados en la Universidad. Su carácter transversal, repercute en gran medida en otras asignaturas afines, como pueden ser: física, química, economía, econometría, estructuras arquitectónicas, etc... Por este motivo, una mejoría del conocimiento matemático tendría una repercusión positiva en muchas asignaturas y titulaciones. Más concretamente, el Departamento de matemáticas de la ULPGC tiene la mayoría de su carga docente en la rama de conocimiento de Ingeniería y Arquitectura, en las asignaturas de Álgebra, Cálculo I y Cálculo II, todas ellas de primer curso.

Agradecemos de antemano cualquier sugerencia o comentario que nos pudiera hacer llegar a través de la dirección: [razonarlasmatematicas@gmail.com](mailto:razonarlasmatematicas@gmail.com)

*Los autores*



CAPÍTULO 1  
**Miscelánea**

*Jackie Harjani Sauco*



## Ejercicio 1

Demostrar que  $n(n+1)(n+2)$  es múltiplo de 6 para cualquier número natural  $n$ .

### Solución

Fijémonos en que  $n$ ,  $n+1$ ,  $n+2$  son tres números consecutivos, así que alguno de ellos es múltiplo de 3 y como mínimo uno será par. Por lo tanto, el número que resulta de multiplicarlos:  $n(n+1)(n+2)$ , es múltiplo de 6.

## Ejercicio 2

Este problema esta basado en las Tareas de selección que llevó a cabo Peter Cathcart Wason en 1966. Tenemos las cuatro cartas que se muestran en la figura 1.1. Cada una tiene: una letra en una cara y un número por la otra, y se trata de calcular cuántas cartas debo voltear para comprobar la veracidad de las siguientes afirmaciones:

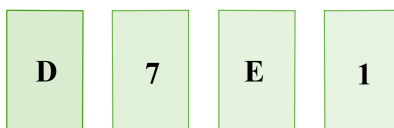


Figura 1.1: Cuatro cartas con una letra en una cara y un número por la otra.

- Si una carta tiene la letra "D" en una cara, entonces la cara opuesta es un "7".
- La letra "D" y el "7" van juntas.

### Solución

- Deberíamos dar la vuelta a dos cartas. Necesitamos saber si la carta con la letra "D" tiene un "7" en su dorso, y también tenemos que comprobar que la carta con un "1" no tiene una "D" en la otra cara.
- En este caso, tenemos que girar todas cartas. La carta con la "D" para comprobar que hay un "7", la carta con el "7" y ver si tiene una "D", la que tiene "E" para observar si tiene un "7" y la carta con el "1" para averiguar si hay una "D".

## Ejercicio 3

Dejamos caer una pelota desde una altura de 20 metros. En cada bote pierde el 30% de su altura.

- a) Tras dos botes, ¿a qué altura estará?
- b) ¿Cuántos botes tiene que dar para estar a menos de 20 cm del suelo?

### **Solución**

- a) Tras dos botes, ¿a qué altura estará?

En el primer bote pierde el 30 % de los 20 metros, es decir, se queda a 14 metros del suelo. En el segundo perdería  $\frac{14 \cdot 30}{100} = 4.2$  metros, quedándose a  $14 - 4.2 = 9.8$  metros.

- b) ¿Cuántos botes tiene que dar para estar a menos de 20 cm del suelo?
- Aunque se podría seguir el mismo razonamiento que en el apartado anterior, seguiremos un procedimiento más general.

Llamaremos  $x_0$  a la altura inicial de la pelota,  $x_1$  la altura tras el primer bote, y en general,  $x_n$  la altura tras  $n$  botes. En el primero pierde el 30 % de  $x_0$ , y entonces  $x_1 = x_0 - 0.3x_0 = (1 - 0.3)x_0 = 0.7x_0$ . Como en cada bote se pierde el 30 % de la cantidad anterior, llegamos a que

$$\begin{aligned}x_1 &= 0.7x_0 \\x_2 &= 0.7x_1 \\x_3 &= 0.7x_2 \\&\vdots \\x_n &= 0.7x_{n-1}\end{aligned}$$

y sustituyendo cada igualdad en la siguiente obtenemos una la fórmula que nos da la altura tras  $n$  botes:

$$x_n = 0.7^n x_0$$

En nuestro caso  $x_0 = 20$  metros, que equivalen a  $x_0 = 2000$  centímetros, y queremos que  $x_n = 20$ . Despejando obtenemos

$$\begin{aligned}20 &= 0.7^n \cdot 2000 \\ \frac{1}{100} &= 0.7^n \\ \log\left(\frac{1}{100}\right) &= n \log 0.7 \\ n &= \frac{-\log 100}{\log 0.7} \\ n &\approx 12.91\end{aligned}$$

Tras 13 botes, su altura será inferior a 20 centímetros.

## Ejercicio 4

Queremos construir un pequeño huerto para plantar hierbas aromáticas en una esquina de nuestro balcón. Para ello colocaremos una verja recta, que sujetaremos al punto  $P(1, 2)$ . Determinar la recta que pasa por  $P$  y minimiza el área del triángulo que forma con la esquina (ver figura 1.2).

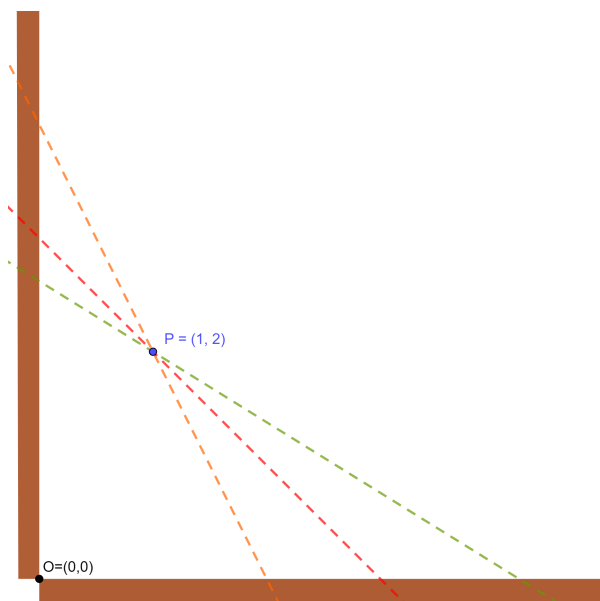


Figura 1.2: Posibles huertos.

### Solución

La figura 1.2 nos muestra distintas posibilidades de poner la verja, y está claro que determinan triángulos con distintas áreas. De éstos, nos piden el de área mínima.

El área de un triángulo es  $A = \frac{b \cdot h}{2}$ . Al estar el origen de coordenadas  $O(0, 0)$  justo en la esquina, la base del triángulo  $b$  se corresponde con el punto de corte de la recta con el eje  $X$ , y la altura  $h$  con el punto de corte con el eje  $Y$ . Si utilizamos la ecuación de la recta  $y = mx + n$ , cortará al eje  $X$  en el punto  $B(-\frac{n}{m}, 0)$  y al eje  $Y$  en el punto  $H(0, n)$ . El área del triángulo quedará

$$A = \frac{-\frac{n}{m}n}{2} = -\frac{n^2}{2m}$$

Además, la recta tiene que pasar por el punto  $P(1, 2)$ , con lo que  $2 = m + n$ .

Podemos despejar  $m$  o  $n$  y dejar el área en función de esta incógnita

$$A = -\frac{n^2}{2m} = -\frac{n^2}{2(2-n)} = -\frac{n^2}{4-2n}$$

Obtengamos los puntos críticos

$$\begin{aligned} A' &= -\frac{2n(4-2n) + 2n^2}{(4-2n)^2} \\ &= -\frac{8n - 2n^2}{(4-2n)^2} \end{aligned}$$

que se anula para los valores  $n = 0$  y  $n = 4$ . Si  $n = 0$  la recta pasaría por  $O(0, 0)$  y no formaría un triángulo. Veamos que para  $n = 4$  obtenemos un mínimo.

$$\begin{aligned} A'' &= -\frac{(8-4n)(4-2n)^2 + 4(4-2n)(8n-2n^2)}{(4-2n)^4} \\ &= -\frac{(8-4n)(4-2n) + 4(8n-2n^2)}{(4-2n)^3} \\ &= -\frac{(8-4n)(4-2n) + 4(8n-2n^2)}{(4-2n)^3} \\ &= -\frac{32}{(4-2n)^3} \end{aligned}$$

de donde se obtiene que  $A''(4) = \frac{1}{2} > 0$ , y entonces, para  $n = 4$  obtenemos un mínimo. Como  $2 = m + n$ ,  $m = -2$ , la recta sería  $y = -2x + 4$ , que coincide con la recta naranja de la figura 1.2.

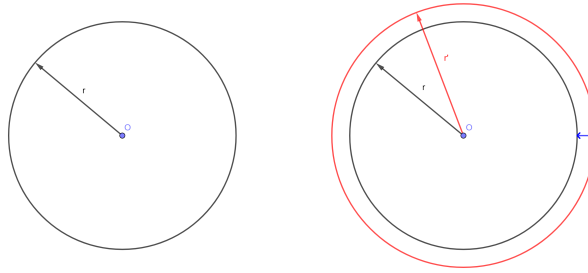
## Ejercicio 5

Supongamos que tenemos una pelota de ping-pong y cuerda suficiente para hacer lo siguiente: con la cuerda medimos el ecuador de la pelota (ver figura 1.3), le añadimos 1 metro, y hacemos una circunferencia concéntrica con el ecuador. La nueva circunferencia quedará separada de la anterior.

- ¿Qué distancia hay entre la pelota y la cuerda?
- Si repetimos el proceso con una pelota de baloncesto, ¿Qué distancia habrá?
- ¿Y si lo hacemos con el ecuador de la tierra?

### Solución

Llamaremos  $L$  a la longitud de la circunferencia original, y  $L'$  será la longitud de la circunferencia mayor. Recordemos que la longitud o perímetro de una



**Figura 1.3: Representación del enunciado.**

circunferencia es  $L = 2\pi r$ . Tenemos que calcular la distancia que hay entre las circunferencias, que se corresponde con  $r' - r$ . Tenemos que

$$L' = 2\pi r'$$

$$L = 2\pi r$$

restando ambas igualdades y teniendo en cuenta que por construcción  $L' = L + 1$

$$L' - L = 2\pi r' - 2\pi r$$

$$1 = 2\pi(r' - r)$$

obteniendo que  $r' - r = \frac{1}{2\pi}$  lo que supone una separación aproximada de 16 centímetros.

Como podemos observar, este razonamiento es válido para los tres apartados, y en todos los casos la cuerda se separa, sorprendentemente, casi 16 centímetros.

## Ejercicio 6

A continuación demostraremos que  $2 = 1$ .

Supongamos que  $a$  y  $b$  son dos números reales iguales:

$$a = b$$

multiplicando por  $b$  obtenemos

$$ab = b^2$$

Entonces  $a^2 - b^2$  se podrá expresar así

$$a^2 - b^2 = a^2 - ab = a(a - b)$$

pero, por ser diferencia de cuadrados, también de esta otra manera

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

luego

$$(a + b)(a - b) = a(a - b)$$

simplificando  $(a - b)$  obtenemos que

$$(a + b)\cancel{(a - b)} = a\cancel{(a - b)}$$
$$(a + b) = a$$

pero como  $a = b$

$$2a = a$$

$$2\cancel{a} = \cancel{a}$$

$$2 = 1$$

Si no encuentra ningún error, podemos concluir que  $2 = 1$ .

### **Solución**

El error se encuentra en el paso

$$(a + b)\cancel{(a - b)} = a\cancel{(a - b)}$$
$$(a + b) = a$$

ya que en realidad, cuando simplificamos  $\cancel{(a - b)}$ , estamos dividiendo ambos miembros de la igualdad por  $(a - b)$ , pero si  $a = b$  entonces  $a - b = 0$ , y no podemos dividir por 0.

### **Ejercicio 7**

Sabemos que un número natural  $n$  es divisible por 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3. ¿Sería capaz de demostrarlo?.

### **Solución**

Supongamos que  $n$  es de una sola cifra  $n = a$ . En este caso, será divisible por 3 si  $a$  es múltiplo de 3.

Si  $n$  tiene dos cifras  $n = ab$ , podemos descomponer el número en base 10,

$$n = a \cdot 10 + b$$

$$n = a \cdot (9 + 1) + b$$

$$n = 9a + a + b$$

$n$  será divisible por 3, si y solo si,  $a + b$  es múltiplo de 3.

Si  $n = abc$  seguimos un razonamiento similar

$$n = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$$

$$n = a \cdot (99 + 1) + b(9 + 1) + c$$

$$n = 99a + 9b + a + b + c$$

$n$  será divisible por 3, si y solo si,  $a + b + c$  es múltiplo de 3.

Con el mismo procedimiento, se podría demostrar para cualquier número natural  $n$ .

## Ejercicio 8

¿Cuántos divisores tiene el número 540?

### Solución

Realizaremos la descomposición en factores primos de 540.

|     |   |
|-----|---|
| 540 | 2 |
| 270 | 2 |
| 135 | 3 |
| 45  | 3 |
| 15  | 3 |
| 5   | 5 |
| 1   |   |

Con lo que  $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ . De esta forma es fácil ver que 540 se puede dividir por 2, por 3, por 4, por 5, por 9 y también por cualquier combinación de factores, por ejemplo 10, 15, etc... Siguiendo las ramas de la figura 1.4 obtenemos todos los posibles divisores.

Si observamos el diagrama 1.4 nos damos cuenta de que, si un número  $n$  tiene la siguiente descomposición en factores primos

$$n = p^a \cdot q^b \cdot r^c$$

El número de divisores de  $n$  sería  $(a + 1) \cdot (b + 1) \cdot (c + 1)$ . En nuestro caso,  $a = 2$ ,  $b = 3$  y  $c = 1$ , por lo que 540 tendrá  $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$  divisores.

Análogamente obtendríamos las fórmulas para otras descomposiciones: multiplicar los números que resultan de sumar uno a cada exponente de la descomposición.

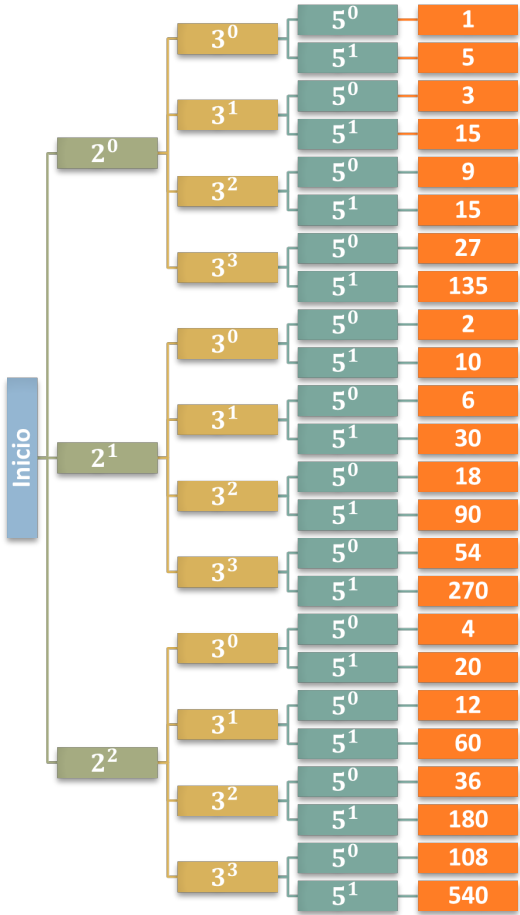


Figura 1.4: Diagrama de árbol con todos los divisores de 540.

Ejercicio 9

Sabemos que los puntos  $A(4, 1, -3)$  y  $B(3, 2, 1)$  pertenecen a la superficie de un planeta esférico, y su centro se encuentra en la recta

$$\frac{x - 8}{2} = \frac{y - 3}{1} = \frac{z + 4}{-1}$$

Obtener el radio del planeta.

Solución

La figura 1.5 ilustra el enunciado. Sabemos que el radio  $r$  de una esfera es la distancia que hay entre cualquiera de sus puntos y el centro. Por tanto, necesitamos conocer las coordenadas  $C(x_0, y_0, z_0)$  del centro del planeta. Como

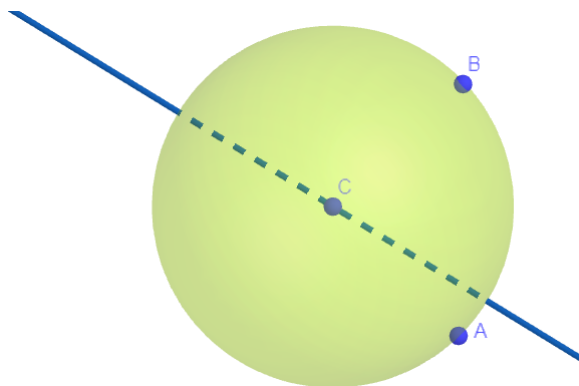


Figura 1.5: Representación del enunciado.

$C$  pertenece a la recta, cumplirá

$$\begin{cases} x_0 = 8 + 2\lambda \\ y_0 = 3 + \lambda \\ z_0 = -4 - \lambda \end{cases}$$

Como los puntos  $A$  y  $B$  están en la esfera, deberán satisfacer su ecuación

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

es decir,

$$(4 - x_0)^2 + (1 - y_0)^2 + (-3 - z_0)^2 = r^2$$

$$(3 - x_0)^2 + (2 - y_0)^2 + (1 - z_0)^2 = r^2$$

Sustituyendo las coordenadas de  $C$  e igualando ambas ecuaciones,

$$(-4 - 2\lambda)^2 + (-2 - \lambda)^2 + (1 + \lambda)^2 = (-5 - 2\lambda)^2 + (-1 - \lambda)^2 + (5 + \lambda)^2$$

de donde se obtiene que  $\lambda = -3$ , y por tanto el centro será  $C(2, 0, -1)$ .

Utilizando cualquiera de las ecuaciones de  $r^2$  deducimos que

$$r^2 = (3 - 2)^2 + (2 - 0)^2 + (1 + 1)^2 = 9$$

con lo que el radio del planeta es  $r = 3$ .

### Ejercicio 10

Sea  $A$  una matriz cuadrada tal que  $A^2 = I - 2A$ , donde  $I$  es la matriz identidad.

a) Demostrar que  $|A| \neq 0$  y calcular su inversa  $A^{-1}$ .

b) Si  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$  cumple  $A^2 = I - 2A$ , hallar el valor de  $k$ .

### Solución

- a) Veamos primero que  $|A| \neq 0$ . Utilizando la propiedad  $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ , y sabiendo que el determinante de la matriz identidad es uno

$$\begin{aligned} A^2 &= I - 2A \\ A^2 + 2A &= I \\ (A + 2I) \cdot A &= I \\ |(A + 2I) \cdot A| &= |I| \\ |A + 2I| \cdot |A| &= |I| \\ |A + 2I| \cdot |A| &= 1 \end{aligned}$$

Si el producto de dos números es 1, ninguno de ellos puede ser 0, de aquí,  $|A| \neq 0$ .

De la matriz  $A$  solo sabemos que es cuadrada y verifica  $A^2 = I - 2A$ , o equivalentemente,  $A^2 + 2A = I$ . Pero entonces

$$\begin{aligned} A^2 + 2A &= I \\ (A + 2I) \cdot A &= I \end{aligned}$$

y obtenemos una matriz  $A + 2I$  que multiplicada por  $A$  nos da la identidad. Para que sea la inversa, solo queda comprobar que conmuta con  $A$ , y efectivamente

$$(A + 2I) \cdot A = A^2 + 2A = A \cdot (A + 2I)$$

Luego  $A^{-1} = A + 2I$ .

- b) Si  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ , entonces  $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & k-2 \\ k-2 & 1+k^2 \end{pmatrix}$ , e  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .  
Sustituyendo

$$\begin{aligned} A^2 &= I - 2A \\ \begin{pmatrix} 5 & k-2 \\ k-2 & 1+k^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & k-2 \\ k-2 & 1+k^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1-2k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y ambas matrices solo serán iguales si  $k = 0$ .

### Ejercicio 11

Los asistentes a la orla de un instituto entran al auditorio por cinco puertas distintas. Por la primera entra una persona, dos entran por la segunda, luego

tres por la tercera, cuatro por la cuarta y cinco por la quinta. Después vuelve a entrar una sola persona por la primera puerta, y continúa el patrón anterior. Si el profesor de matemáticas es el espectador número 984, ¿por qué puerta entró?

### **Solución**

Por la puerta 4.

Como entra 1 espectador por la primera puerta, 2 por la segunda, 3 por la tercera, 4 por la cuarta y 5 por la quinta y vuelven a comenzar. Podemos considerar que entran en grupos de 15 personas ( $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ ) Como  $984 = 65 \cdot 15 + 9$ . El profesor de matemáticas será el espectador número 9 de su "grupo", luego entrará por la cuarta puerta.

## **Ejercicio 12**

Juan metió en 6 botes los caramelos que recibió la noche de Halloween, cinco botes solo tenían caramelos de fresa y uno sólo de menta. Los botes tenían 15, 16, 18, 19, 20 y 31 caramelos cada uno. Su amiga Lucía vino a su casa esa noche y cogió unos cuantos caramelos de distintos botes. A la mañana siguiente, su hermana Ana cogió el doble de caramelos de fresa que Lucía y a Juan sólo le quedaron caramelos de menta. ¿Cuántos caramelos de menta recibió Juan la noche de Halloween?

### **Solución**

20 caramelos de menta.

Llamamos  $x$  al número de caramelos de fresa que se llevó Lucía y  $2x$  al número de caramelos que se llevó Ana. Podemos concluir que el total de caramelos de fresa debe ser múltiplo de 3 ( $x + 2x = 3x$  total de caramelos de fresa). Al estar los caramelos de fresa distribuidos en 5 botes, estudiamos las diferentes posibilidades, teniendo en cuenta que en total hay 119 caramelos.

| Limón | Fresa |
|-------|-------|
| 15    | 104   |
| 16    | 103   |
| 18    | 101   |
| 19    | 100   |
| 20    | 99    |
| 31    | 88    |

Como el único número múltiplo de 3 es el 99, concluimos que Juan recibió 99 caramelos de fresa y 20 de limón.

### Ejercicio 13

Si colocamos cuatro monedas tocándose de dos en dos (como se muestra en la figura 1.6), podrías calcular el área que dejan encerrada en función del radio de la moneda.

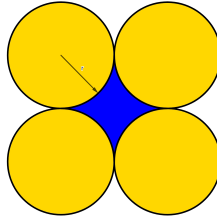


Figura 1.6: Colocación de las monedas.

#### Solución

Si llamamos  $r$  al radio de la moneda y formamos un cuadrado con los centros de las monedas, éste tendría lado  $2r$  y área  $4r^2$  (ver figura 1.7).

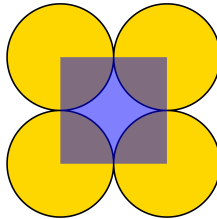


Figura 1.7: Cuadrado de lado  $2r$ .

El área buscada se obtiene restandole al área del cuadrado los cuatro cuartos de circunferencia que no corresponden al área encerrada por las monedas. Es decir:

$$\text{Área} = 4r^2 - 4 \frac{\pi r^2}{4} = 4r^2 - \pi r^2 = (4 - \pi) r^2$$

### Ejercicio 14

Un local está dividido en 4 salas, y sus áreas aparecen en la figura 1.8. ¿Sería capaz de obtener el área de la sala que falta?

#### Solución

Si nombramos las paredes del local como se propone en la figura 1.9, se nos pide calcular el valor de  $x = b \cdot d$ .

|   |   |
|---|---|
| 2 | 5 |
| 3 |   |

Figura 1.8: Áreas de las salas.

|   |   |   |
|---|---|---|
|   | a | b |
| c | 2 | 5 |
| d | 3 | X |

Figura 1.9: Notación.

A partir de los datos, podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a \cdot c = 2 \\ b \cdot c = 5 \\ a \cdot d = 3 \end{cases}$$

Multiplicando las ecuaciones segunda y tercera, y aprovechando la información de la primera, obtenemos:

$$b \cdot c \cdot a \cdot d = 3 \cdot 5 \implies b \cdot 2 \cdot d = 15 \implies b \cdot d = \frac{15}{2}$$

## Ejercicio 15

EBAU Portugal 2021 (sin el dibujo ilustrativo).

Tenemos dos rectas paralelas  $r$  y  $s$ . En  $r$  hay 5 puntos, y en  $s$  un número  $n$  de puntos. Si formamos triángulos con los puntos de ambas rectas ¿Cuál de debe ser el valor de  $n$  para obtener exactamente 175 triángulos?

### Solución

En la figura 1.11 se muestran algunos de los posibles triángulos. Tenemos dos

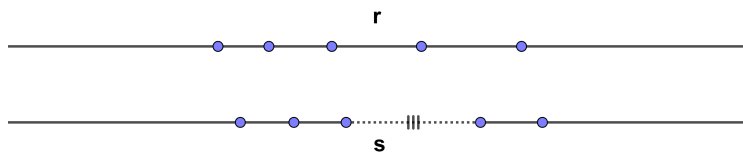


Figura 1.10: Representación del enunciado.

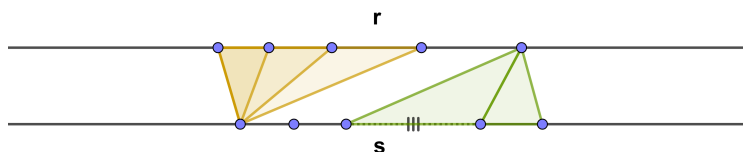


Figura 1.11: Posibles triángulos.

maneras de formar triángulos. Elegir dos puntos de  $r$  y otro de  $s$ :

$$C_2^5 \cdot C_1^n = \binom{5}{2} \cdot \binom{n}{1} = \frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2 \cdot \cancel{3!}} \cdot n = 10n$$

O bien, dos puntos de  $s$  y otro de  $r$ .

$$C_2^n \cdot C_1^5 = \binom{n}{2} \cdot \binom{5}{1} = \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \frac{5!}{1!(5-1)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{2 \cdot \cancel{(n-2)!}} \cdot 5 = \frac{5n^2 - 5n}{2}$$

Como queremos formar exactamente 175 triángulos

$$\begin{aligned} 10n + \frac{5n^2 - 5n}{2} &= 175 \implies 20n + 5n^2 - 5n = 350 \\ &\implies 5n^2 + 15n - 350 = 0 \\ &\implies n^2 + 3n - 70 = 0 \end{aligned}$$

y resolviendo la ecuación obtenemos

$$n = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 280}}{2} = \frac{-3 \pm 17}{2} \implies n = 7 \text{ o } n = -10$$

Como el número de puntos debe ser positivo, la solución es  $n = 7$ ,

## Ejercicio 16

Tenemos tres fichas de colores rojo, blanco y azul, aunque no necesariamente en este orden.

Una y sólo una de las siguientes afirmaciones es cierta:

- a) la primera es roja;
- b) la segunda no es roja;
- c) la tercera no es azul.

¿En qué orden están los colores?

### ***Solución***

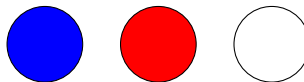
Supongamos que la afirmación a) es verdadera. Esto implica que son falsas b) y c)

La afirmación a) nos dice que la primera ficha es roja, lo que debemos asumir como cierto. La segunda afirmación, que ha de ser falsa, dice que la segunda ficha no es roja, pero entonces la verdad es que la segunda ficha es roja. Pero esto no es posible porque las fichas son de colores distintos y por tanto no puede haber dos del mismo color.

Supongamos ahora que la afirmación b) es verdadera, lo que implica que a) y c) son falsas. Esto supone que la primera no es roja, la segunda tampoco es roja y la tercera es azul. Pero esta situación no es posible, dado que si la tercera es azul, o bien la primera o bien la segunda han de ser rojas.

La última posibilidad es que la afirmación c) sea verdadera y por tanto a) y b) falsas. En tal caso la primera no es roja, la segunda es roja y la tercera no es azul.

La tercera no es azul y no puede ser roja porque lo es la segunda, luego sólo puede ser blanca; y entonces la primera sólo puede ser azul.



**Figura 1.12: Solución.**



## CAPÍTULO 2

# Números y Álgebra

*Ángel Almeida Rodríguez*  
*Belén López Brito*



### Ejercicio 17

Dado el siguiente sistema de vectores  $S = \{(3, 1, -1), (0, 7, -1), (-1, 2, 0)\}$  estudiar si son o no linealmente independientes.

#### Solución

Para que sean linealmente independiente, el determinante que se construye poniendo cada vector en una fila debe ser distinto de cero. Es decir, debe cumplirse que

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Sin embargo,

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 7 + 6 = 0,$$

por lo tanto los vectores dados no son linealmente independientes, sino linealmente dependientes.

### Ejercicio 18

Dada la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ . Calcula  $A^n$ .

#### Solución

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 15 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 1 + 2 + \dots + n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Ejercicio 19

Sabiendo que una matriz  $A$  es simétrica cuando  $A^T = A$ , resolver el siguiente ejercicio: Sea  $A$  una matriz de orden  $p \times q$ . Razonar si la matriz  $A \cdot A^T$  es simétrica.

#### Solución

Habría que comprobar que

- i) Siempre es posible realizar  $A \cdot A^T$ .
- ii) Que  $(A \cdot A^T)^T = A \cdot A^T$ .
- i) Si  $A$  tiene orden  $p \times q$ , entonces  $A^T$  tiene orden  $q \times p$ . Como el número de columnas de  $A$  coincide con el número de filas de  $A^T$ , se podrán multiplicar:  $A_{p \times q} \cdot A_{q \times p}^T = (A \cdot A^T)_{p \times p}$  y es de orden  $p \times p$ .
- ii)  $(A \cdot A^T)^T = (A^T)^T \cdot A^T = A \cdot A^T$ . El primer igual se obtiene aplicando la propiedad  $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$  y el segundo igual aplicando la propiedad  $(A^T)^T = A$ .

Luego, efectivamente,  $A \cdot A^T$  es una matriz simétrica.

### Ejercicio 20

Sabiendo que una matriz  $A$  es simétrica cuando  $A^T = A$ , y es antisimétrica si  $A = -A^T$ , resolver el siguiente ejercicio: Dadas las matrices  $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ , con  $A$  simétrica y  $B$  antisimétrica, razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- i)  $A \cdot B$  es antisimétrica
- ii)  $A + B$  es simétrica.
- iii)  $(A - B) \cdot (A + B)$  es simétrica

### Solución

i) Es falsa.

Si fuese antisimétrica tendría que cumplirse que  $(A \cdot B)^T = -A \cdot B$

Lo que podemos asegurar solamente es que  $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T = -B \cdot A$ .

Por ejemplo si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que  $A = A^T$  y que  $B = -B^T$ , pero:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad -A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$(A \cdot B)^T \neq -A \cdot B$$

Es decir  $A \cdot B$  no es antisimétrica.

ii) Es falsa.

Como contraejemplos basta tomar las matrices de i).

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (A + B)^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego  $A + B \neq (A + B)^T$  por lo tanto,  $A + B$  no es simétrica.

iii) Es verdadera.

Se tiene que

$$\begin{aligned} ((A - B) \cdot (A + B))^T &= (A + B)^T \cdot (A - B)^T \\ &= (A^T + B^T) \cdot (A^T - B^T) \\ &= (A - B) \cdot (A + B) \end{aligned}$$

### Ejercicio 21

Sabiendo que una matriz  $B$  es simétrica cuando  $B^T = B$ , resolver el siguiente ejercicio: Sea  $A$  una matriz columna de orden  $n \times 1$  tal que  $A^T \cdot A = 1$  y  $B = I - 2A \cdot A^T$ , siendo  $I$  la identidad de orden  $n \times n$ . Comprobar que  $B$  es simétrica.

### Solución

Habría que comprobar que  $B^T = B$ .

$$B^T = (I - 2A \cdot A^T)^T = I^T - 2(A^T)^T \cdot A^T = I - 2A \cdot A^T = B$$

Luego, efectivamente, es simétrica.

### Ejercicio 22

Sean  $A, B \neq 0$  y  $C$  tres matrices cuadradas de dimensión  $n$  que cumplen la siguiente igualdad:  $AB = CB$ , ¿se podría afirmar que  $A = C$ ?

### Solución

Distinguiremos dos casos, según exista o no, la inversa de  $B$ .

- Si  $B$  es regular:

$$AB = CB \implies ABB^{-1} = CBB^{-1} \implies AI = CI \implies A = C$$

- Si  $B$  no es regular:

Buscamos un contraejemplo.

Consideramos, la siguiente matriz singular  $B$ , y la matriz  $A$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

El producto  $AB = 0$ .

Si consideramos  $C$  la matriz nula, entonces  $AB = CB$  y sin embargo  $A \neq C$ .  
Por lo tanto, tenemos un contraejemplo.

### Ejercicio 23

Ver para qué valores de  $\alpha$ , la matriz  $A$  tiene inversa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

### Solución

Sabemos que para que  $A$  tenga matriz inversa, tiene que tener su determinante distinto de 0, es decir,  $|A| \neq 0$ .

Vamos a calcular  $|A|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4\alpha - 2 + 2\alpha = -2\alpha - 1$$

Por tanto, si  $|A| = 0$  entonces  $A$  no tiene inversa. Es decir, si

$$-2\alpha - 1 = 0$$

De aquí, si  $\alpha = -1/2$ ,  $A$  no tiene inversa. De donde se concluye que si  $\alpha \neq -1/2$ ,  $A$  tiene inversa.

### Ejercicio 24

Calcula los valores de los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  para los cuales  $\text{rango}(B)$  sea 1, siendo  $B$  la siguiente matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \\ -1 & 1 \\ -3 & c \end{pmatrix}$$

### Solución

Para que el  $\text{rango}(B) = 1$  las dos columnas tienen que ser Linealmente Dependientes, es decir, las dos columnas han de ser proporcionales. Por lo tanto

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{1}{-1} = \frac{c}{-3}$$

De donde deducimos que:

$$\frac{a}{1} = -1 \implies a = -1$$

$$\frac{b}{2} = -1 \implies b = -2$$

$$\frac{c}{-3} = -1 \implies c = 3$$

## Ejercicio 25

¿Para qué valores de  $a \in \mathbb{R}$ , la matriz  $A$  tiene rango 3?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 18a & a \end{pmatrix}$$

### Solución

Para que una matriz tenga rango 3 se debe encontrar un menor de orden 3 distinto de cero y que se cumpla que todos los menores de orden mayor que 3 son iguales a 0.

En este caso particular sólo existen un menor de orden 3 y ninguno de orden mayor que tres, por tanto tenemos que estudiar para qué valores de  $a$  la matriz tiene determinante distinto de 0.

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & a \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 18a & a \end{vmatrix} = 9a + 36a^2 = 9a(1 + 4a) \neq 0.$$

La solución es que para  $a \neq 0$  y  $a \neq -\frac{1}{4}$ , se cumple que  $\text{Rango}(A) = 3$ .

## Ejercicio 26

De un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas  $AX = B$ , siendo  $A$  la matriz de coeficientes,  $X$  la matriz de las incógnitas y  $B$  la matriz de los términos independientes, se sabe que el sistema es compatible indeterminado y que el  $\text{Rango}(A) = 3$ , ¿puede suceder que el rango de la matriz ampliada  $A' = (A|B)$  sea 4 (la matriz ampliada de  $A$  es la matriz  $A$  añadiéndole la columna de los términos independientes)?

### Solución

Por el Teorema de Rouché Fröbenius, para que un sistema sea compatible, el rango de la matriz de coeficientes debe coincidir con el rango de la matriz ampliada, es decir  $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A')$ , por lo tanto, si el  $\text{Rango}(A) = 3$  obligatoriamente  $\text{Rango}(A') = 3$  por ser el sistema compatible.

## Ejercicio 27

El conjunto de soluciones de un cierto sistema de ecuaciones lineales es de la forma  $x = \lambda + 1$ ,  $y = 0$ ,  $z = \lambda$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Con estos datos, razonar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- a) No es un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, es decir, con todos sus términos independientes nulos.
- b) Con la información dada no se puede saber si es o no un sistema de ecuaciones lineales homogéneo.
- c) Es un sistema de ecuaciones homogéneo.

### **Solución**

Como el sistema es compatible indeterminado (depende de un parámetro  $\lambda$ ), si fuese homogéneo, su solución debería incluir también la trivial  $x = 0, y = 0, z = 0$ . Pero no existe ningún valor real de  $\lambda$  que produzca la solución trivial ya que

$$x = \lambda + 1 = 0 \implies \lambda = -1$$

$$y = 0$$

$$z = \lambda = 0 \implies \lambda = 0$$

y por lo tanto el sistema considerado no puede ser homogéneo. La única afirmación verdadera es la primera.

### **Ejercicio 28**

Si el sistema de ecuaciones lineales  $AX = B$ , con  $B \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  es incompatible, entonces podemos asegurar que el sistema  $AX = 0$  puede ser:

- a) Incompatible.
- b) Compatible indeterminado.
- c) Compatible determinado.

### **Solución**

La solución trivial siempre es solución de cualquier sistema homogéneo  $AX = 0$ , y por tanto, dicho sistema es compatible. Si es la única solución será compatible determinado y si existen más soluciones compatible indeterminado (infinitas soluciones), pero nunca puede ser incompatible. Por tanto las respuestas correctas son la b) y la c).

## Ejercicio 29

El martes pasado Mar, Mario y Marcos compraron en la frutería de la esquina. Mar pagó 8,35€ por un kilo de guayabos, un kilo de plátanos y medio kilo de tunos indios; Mario pagó 12,2€ por kilo y medio de guayabos, dos kilos de plátanos y medio kilo de tunos indios; y Marcos pagó 18,6€ por dos kilos de guayabos, tres kilos de plátanos y un kilo de tunos indios. ¿A cuánto estaban el martes pasado los guayabos, los plátanos y los tunos indios en la frutería de la esquina?

### Solución

Se nos pide el precio por kilo de guayabos, plátanos y tunos indios. Llamemos  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente a estas cantidades.

Mar pagó 8.35 € por comprar un kilo de guayabos, un kilo de plátanos y medio kilo de tunos indios. Esto nos da la igualdad  $x + y + 0.5 = 8.35$ .

Mario pagó 12.2 € por kilo y medio de guayabos, dos kilos de plátanos y medio kilo de tunos indios, por lo que  $1.5x + 2y + 0.5z = 12.2$ .

Marcos pagó 18.6 € por dos kilos de guayabos, tres kilos de plátanos y un kilo de tunos indios, lo que supone que  $2x + 3y + z = 18.6$ .

Las cantidades pedidas son entonces soluciones del sistema lineal

$$\begin{cases} x + y + 0.5z = 8.35 \\ 1.5x + 2y + 0.5z = 12.2 \\ 2x + 3y + z = 18.6 \end{cases}$$

Podemos simplificar los cálculos si hacemos  $8.35 = a$ ,  $12.2 = b$  y  $18.6 = c$ , con lo que podemos reescribir el sistema como

$$\begin{cases} x + y + 0.5z = a \\ 1.5x + 2y + 0.5z = b \\ 2x + 3y + z = c \end{cases}$$

Si además multiplicamos por 2 el primer y segundo miembros de la primera y segunda ecuación nos queda

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 2a \\ 3x + 4y + z = 2b \\ 2x + 3y + z = c \end{cases}$$

Resolvemos este sistema a continuación por eliminación.

Si a la segunda ecuación le restamos la primera previamente multiplicada por  $\frac{3}{2}$  obtenemos

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 2a \\ y - \frac{1}{2}z = -3a + 2b \\ 2x + 3y + z = c \end{cases}$$

Si ahora le restamos la primera ecuación a la tercera nos queda

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 2a \\ y - \frac{1}{2}z = -3a + 2b \\ y = -2a + c \end{cases}$$

Y en este último sistema aparece  $y$  despejada en la tercera ecuación, y ya sólo queda despejar  $z$  en la segunda y después  $x$  en la primera.

$$y = -2a + c = -2 \cdot 8.35 + 18.6 = -16.7 + 18.6 = 1.9$$

$$y - \frac{1}{2}z = -3a + 2b \implies -\frac{1}{2}z = -3a + 2b - y = -3a + 2b - (-2a + c)$$

$$= -a + 2b - c \implies z = -2(-a + 2b - c) = 2a - 4b + 2c$$

$$= 2 \cdot 8.35 - 4 \cdot 12.2 + 2 \cdot 18.6 = 16.7 - 48.8 + 37.2 = 53.9 - 48.8 = 5.1$$

$$2x + 2y + z = 2a \implies 2x = 2a - 2y - z = 2a - 2(-2a + c) - (2a - 4b + 2c)$$

$$= 4a + 4b - 4c = 4 \cdot 8.35 + 4 \cdot 12.2 - 4 \cdot 18.6 = 33.4 + 48.8 - 74.4$$

$$= 82.2 - 74.4 = 7.8 \implies x = 3.9$$

En resumen, hemos obtenido que  $x = 3.9$ ,  $y = 1.9$  y  $z = 5.1$ . Por tanto, sabemos que el martes pasado en la frutería de la esquina los guayabos estaban a 3.9 € el kilo, los plátanos a 1.9 € el kilo y los tunos indios a 5.1 € el kilo.

### Ejercicio 30

Una empresa de productos alimenticios tiene un stock de 114 kilos de chocolate y 111 litros de leche, con los que puede elaborar tres productos distintos  $A$ ,  $B$  y  $C$ . El producto  $A$  requiere un 40 % de chocolate y un 10 % de leche, el producto  $B$  requiere un 25 % de chocolate y un 25 % de leche, mientras que  $C$  requiere un 20 % de chocolate y un 30 % de leche. Del resto de ingredientes (azúcar, etc.) la empresa dispone de reservas abundantes. Determina las posibilidades que tiene la empresa para consumir su stock con los productos  $A$ ,  $B$  y  $C$ . ¿Cuál de todas le proporcionará más beneficios si la empresa obtiene 10 € por cada kilo de  $A$ , 8 € por cada kilo de  $B$  y 6 € por cada kilo de  $C$ ?

### Solución

Llamemos  $x, y, z$  a las cantidades respectivas de los productos  $A, B$  y  $C$  que puede producir la empresa. En total se requieren  $0.4x + 0.25y + 0.2z$  kilos de chocolate y  $0.1x + 0.25y + 0.3$  kilos de leche. Por consiguiente hemos de resolver el sistema:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 0.4x + 0.25y + 0.2z = 114 \\ 0.1x + 0.25y + 0.3z = 111 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 40x + 25y + 20z = 11400 \\ 10x + 25y + 30z = 11100 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 40x + 25y + 20z = 11400 \\ 75y + 100z = 33000 \end{cases} \end{aligned}$$

Hacemos  $z = \lambda$ , con lo que la solución es:

$$(x, y, z) = \left(10 + \frac{1}{3}\lambda, 440 - \frac{4}{3}\lambda, \lambda\right), \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ésta es la solución general del sistema, pero no es cierto que cualquier valor de  $\lambda$  nos de una producción aceptable para la empresa. Hemos de exigir que  $x, y, z$  sean mayores o iguales que 0, es decir,

$$\begin{aligned} 10 + \frac{\lambda}{3} &\geq 0 \Rightarrow \lambda \geq -30 \\ 440 - \frac{4\lambda}{3} &\geq 0 \Rightarrow \lambda \leq 330 \\ \lambda &\geq 0 \end{aligned}$$

En definitiva, los valores aceptables para el parámetro son los que cumplen  $0 \leq \lambda \leq 330$ . De este modo, tenemos un único parámetro  $\lambda$  que determina cada una de las posibilidades de la empresa. Si expresamos el beneficio correspondiente en función de  $\lambda$  estaremos en condiciones de determinar qué opción es la más ventajosa:

$$\text{Beneficio} = 10 \left(10 + \frac{\lambda}{3}\right) + 8 \left(440 + \frac{4\lambda}{3}\right) + 6\lambda = 3620 - \frac{4\lambda}{3}$$

Ahora es claro que el beneficio será mayor cuanto menor sea  $\lambda$ , luego será máximo para  $\lambda = 0$ . La solución más conveniente para la empresa es, pues:

$$(x, y, z) = (10, 440, 0).$$

### Ejercicio 31

Sea  $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$  el vector de precios de un mercado en el que se venden tres productos  $A, B$  y  $C$ . Se estima que la oferta y la demanda de cada uno de ellos

viene dada por:

$$\begin{array}{ll} O_A = 15p_1 + p_2 + 3p_3 - 13 & D_A = 70 - 8p_1 - p_2 - p_3 \\ O_B = p_1 + 20p_2 + 10p_3 - 10 & D_B = 93 - 2p_1 - 4p_2 - p_3 \\ O_C = 10p_1 + 15p_2 + 30p_3 - 50 & D_C = 107 - p_1 - 3p_2 - 5p_3 \end{array}$$

Calcular los precios de equilibrio, es decir, los precios para los cuales la oferta coincide con la demanda.

### Solución

Tendremos que solucionar el siguiente sistema

$$\begin{cases} 15p_1 + p_2 + 3p_3 - 13 = 70 - 8p_1 - p_2 - p_3 \\ p_1 + 20p_2 + 10p_3 - 10 = 93 - 2p_1 - 4p_2 - p_3 \\ 10p_1 + 15p_2 + 30p_3 - 50 = 107 - p_1 - 3p_2 - 5p_3 \end{cases}$$

En primer lugar lo ordenamos y luego aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 23p_1 + 2p_2 + 4p_3 = 83 \\ 3p_1 + 24p_2 + 11p_3 = 103 \\ 11p_1 + 18p_2 + 35p_3 = 157 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 23p_1 + 2p_2 + 4p_3 = 83 \\ 546p_2 + 241p_3 = 2120 \\ 392p_2 + 761p_3 = 2698 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 23p_1 + 2p_2 + 4p_3 = 83 \\ 546p_2 + 241p_3 = 2120 \\ 321034p_3 = 642068 \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el vector de precios de equilibrio es  $\vec{p} = (3, 3, 2)$ .

### Ejercicio 32

Una empresa produce cuatro bienes diferentes  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$ , para los que utiliza cuatro materias primas  $m_1, m_2, m_3$  y  $m_4$ . El consumo en Kg. para obtener 1 unidad de cada producto es el siguiente

$$A = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ 56 & 32 & 21 & 43 \\ 62 & 23 & 15 & 54 \\ 57 & 17 & 21 & 61 \\ 75 & 28 & 35 & 42 \end{pmatrix} \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{matrix}$$

Es decir, para producir una unidad de  $P_1$  necesitamos 56 Kg de  $m_1$ , 32 Kg de  $m_2$ , 21 Kg de  $m_3$  y 43 Kg de  $m_4$ , y análogamente con el resto de productos.

Los costes, en € por Kg, de cada una de las materias es:

$$B = \begin{pmatrix} 2,7 \\ 3,3 \\ 2,5 \\ 1,3 \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{matrix}$$

¿Cuál es el coste de producción por Kg. de cada producto  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$ ?

### Solución

El coste de producción por Kg. de cada producto  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$  será cada una de las filas de  $A \cdot B$  respectivamente.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 365,2 \\ 351 \\ 341,8 \\ 437 \end{pmatrix}$$

Es decir, el coste de producción de 1 Kg. de  $P_1$  es de 365,2€, el coste de producción de 1 Kg. de  $P_2$  es de 351€, el coste de producción de 1 Kg. de  $P_3$  es de 341,8€ y el coste de producción de 1 Kg de  $P_4$  es de 437€.

### Ejercicio 33

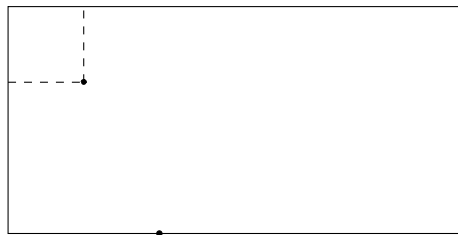
Para ilustrar la presentación de un trabajo se quiere dibujar un segmento de parábola. El espacio disponible para hacerlo es un rectángulo de 6 centímetros de ancho por 3 centímetros de alto. Otros requerimientos de la ilustración nos llevan a concluir que el segmento de parábola debería pasar:

- ✓ por un punto situado 1 centímetro por debajo del lado superior y 1 centímetro a la derecha del lado izquierdo del rectángulo;
- ✓ por un punto en el lado inferior a 2 centímetros del vértice inferior izquierdo del rectángulo;
- ✓ y por un punto en el lado derecho a 2 centímetros del vértice superior derecho del rectángulo;

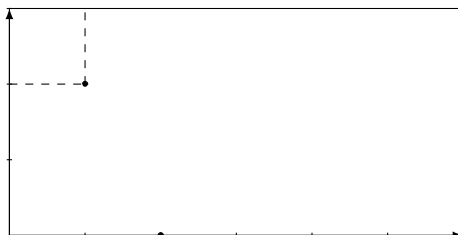
Para construir esta parábola tenemos que usar un programa que dibuja curvas que son gráficas de funciones. Necesitamos por tanto calcular un polinomio cuya gráfica cumpla con los requerimiento dados. ¿Cuál es ese polinomio? ¿Resuelve realmente nuestro problema?

### Solución

Empezamos por dibujar un rectángulo como el que se necesita y situar en él los tres puntos



Si utilizamos el centrímetro como unidad de medida y superponemos unos ejes cartesianos que contienen al lado izquierdo y al lado inferior del rectángulo, entonces el vértice inferior izquierdo es el origen del sistema



Vamos a ver si un trozo de una parábola cuyo eje sea perpendicular a la base del rectángulo nos vale. Sabemos que este tipo de parábolas son gráficas de polinomios de segundo grado con coeficientes reales.

El problema se convierte así en el de encontrar un polinomio de segundo grado cuya gráfica pase por los puntos  $(1, 2)$ ,  $(2, 0)$  y  $(6, 1)$ .

Supongamos que  $p(x)$  es el polinomio que cumple con nuestros requerimientos. Existirán entonces números reales  $a_0$ ,  $a_1$  y  $a_2$  tales que

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Los puntos de la gráfica de  $p(x)$  son puntos de la forma  $(x, p(x))$  con  $x$  real. Así, si  $(1, 2)$  está en la gráfica de  $p(x)$  es porque

$$2 = p(1) = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 = a_0 + a_1 + a_2$$

Obtenemos de aquí que  $a_0 + a_1 + a_2 = 2$ .

Si  $(2, 0)$  está en la gráfica de  $p(x)$  es porque

$$0 = p(2) = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 = a_0 + 2a_1 + 4a_2$$

Obtenemos de aquí que  $a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0$ .

Si  $(6, 1)$  está en la gráfica de  $p(x)$  es porque

$$1 = p(6) = a_0 + a_1 \cdot 6 + a_2 \cdot 6^2 = a_0 + 6a_1 + 36a_2$$

Obtenemos de aquí que  $a_0 + 6a_1 + 36a_2 = 1$ .

Juntando las tres igualdades tenemos que los coeficientes de  $p(x)$  son soluciones del sistema lineal

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 2 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0 \\ a_0 + 6a_1 + 36a_2 = 1 \end{cases}$$

Resolvemos a continuación mediante la eliminación de Gauss.

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 2 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0 \\ a_0 + 6a_1 + 36a_2 = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 2 \\ a_1 + 3a_2 = -2 \\ 5a_1 + 35a_2 = -1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 2 \\ a_1 + 3a_2 = -2 \\ 20a_2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 2 \\ a_1 + 3a_2 = -2 \\ a_2 = \frac{9}{20} \end{cases} \end{aligned}$$

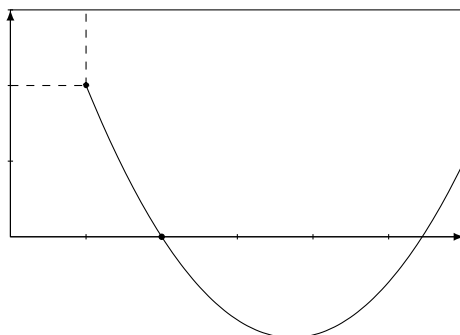
El último sistema nos da directamente que  $a_2 = \frac{9}{20}$ . Ya sólo queda despejar  $a_1$  en la segunda ecuación y  $a_0$  en la primera.

$$\begin{aligned} a_1 + 3a_2 = -2 &\Rightarrow a_1 = -2 - 3a_2 = -2 - 3\frac{9}{20} = -2 - \frac{27}{20} = -\frac{67}{20} \\ a_0 + a_1 + a_2 = 2 &\Rightarrow a_0 = 2 - a_1 - a_2 = 2 - \left(-\frac{67}{20}\right) - \frac{9}{20} = 2 + \frac{67}{20} - \frac{9}{20} \\ &= 2 + \frac{29}{10} = \frac{49}{10} \end{aligned}$$

Hemos obtenido que los coeficientes requeridos son  $a_0 = \frac{49}{10}$ ,  $a_1 = -\frac{67}{20}$  y  $a_2 = \frac{9}{20}$ . Con ellos podemos construir el polinomio que buscábamos:

$$p(x) = \frac{49}{10} - \frac{67}{20}x + \frac{9}{20}x^2$$

Por último comprobamos si este polinomio nos permite construir la curva que necesitamos para la ilustración. Para ello dibujamos sobre el rectángulo la gráfica de  $p(x)$  con  $1 \leq x \leq 6$ .



Hemos conseguido una parábola que pasa por los tres puntos requeridos. ¿Pero resuelve esto nuestro problema?

### Ejercicio 34

Esbozar la región del plano determinada por las desigualdades  $x - y + 1 > 0$ ,  $x + 4y - 4 > 0$  y  $4x + y - 16 > 0$

#### Solución

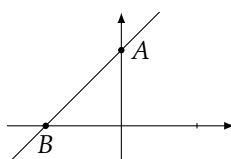
Cada una de las desigualdades dadas determina un semiplano, el conjunto de puntos del plano que están a uno de los dos lados en que la recta divide el plano.

A continuación esbozamos cada uno de los tres semiplanos por separado. Finalmente añadimos en un único dibujo los tres esbozos para tener una idea visual de la región que describen las tres desigualdades.

a) *Esbozo del semiplano  $x - y + 1 > 0$ .*

Empezamos por esbozar el semiplano  $x - y + 1 > 0$ , cuya frontera es la recta de ecuación  $x - y + 1 = 0$ . Llamemos a esta recta  $r_1$ . Para poder dibujar  $r_1$  calculamos dos puntos que estén en ella.

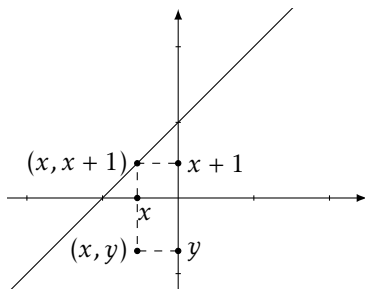
Si hacemos  $x = 0$  en  $x - y + 1 = 0$  obtenemos  $-y + 1 = 0$  y por tanto  $y = 1$ , lo que nos da el punto  $A = (0, 1)$  en  $r_1$ . Análogamente, si hacemos  $y = 0$  en  $x - y + 1 = 0$ , obtenemos  $x + 1 = 0$  y por tanto  $x = -1$ , lo que nos da el punto de  $r_1$   $B = (-1, 0)$ . Una vez situados los puntos  $A$  y  $B$  en el plano podemos dibujar  $r_1$  como la única recta que pasa por  $A$  y por  $B$ .



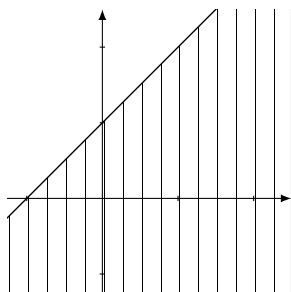
Ahora vemos donde situar los puntos  $(x, y)$  que verifican  $x - y + 1 > 0$ .

Si en la ecuación de  $r_1$  despejamos  $y$  obtenemos  $y = x + 1$ . Esta es la ecuación explícita de  $r_1$ , esto es, una ecuación que describe los mismos puntos del plano, pero que tiene la forma  $y = f(x)$ . Los puntos de  $r_1$  son así aquellos de la forma  $(x, x + 1)$ .

Por otra parte  $x - y + 1 > 0$  es equivalente a  $x + 1 > y$  o, lo que es lo mismo  $y < x + 1$ .

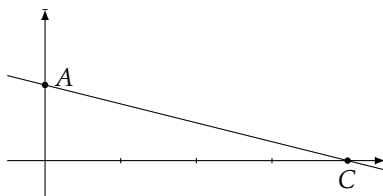


Observamos que los puntos del plano que verifican que  $y < x + 1$  son aquellos situados por debajo de la recta  $y = x + 1$ . Lo señalamos en el dibujo mediante un rayado vertical.



b) Esbozo del semiplano  $x + 4y - 4 > 0$ .

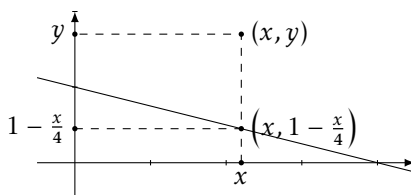
Esbozamos a continuación el semiplano  $x + 4y - 4 > 0$ , cuya frontera es la recta de ecuación  $x + 4y - 4 = 0$ . Llamemos a esta recta  $r_2$ . Para dibujar  $r_2$  calculamos dos puntos de la misma. Si hacemos  $x = 0$  en  $x + 4y - 4 = 0$  obtenemos  $4y - 4 = 0$  y por tanto  $y = 1$ , lo que nos da el punto  $A = (0, 1)$  obtenido previamente y que también está en  $r_1$ . Análogamente, si hacemos  $y = 0$  en  $x + 4y - 4 = 0$ , obtenemos  $x - 4 = 0$  y por tanto  $x = 4$  lo que nos da el punto  $C = (4, 0)$  en  $r_2$ . Una vez situados los puntos  $A$  y  $C$  en el plano, podemos dibujar  $r_2$  como la única recta que pasa por  $A$  y por  $C$ .



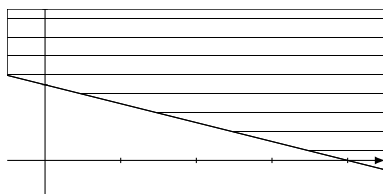
Señalamos a continuación mediante un rayado horizontal el semiplano formado por los puntos  $(x, y)$  que verifican que  $x + 4y - 4 > 0$ .

Si en la ecuación de  $r_2$  despejamos  $y$  obtenemos  $y = 1 - \frac{x}{4}$ , que es la ecuación explícita de la recta  $r_2$  de la forma  $y = f(x)$ . Los puntos de  $r_2$  son así aquellos de la forma  $(x, 1 - \frac{x}{4})$ .

Por otra parte  $x + 4y - 4 > 0$  es equivalente a  $y > 1 - \frac{x}{4}$ .



Los puntos del semiplano  $x + 4y - 4 > 0$  son aquellos que están por encima de la recta  $x + 4y - 4 = 0$ . Señalamos esto en el dibujo con un rayado horizontal.



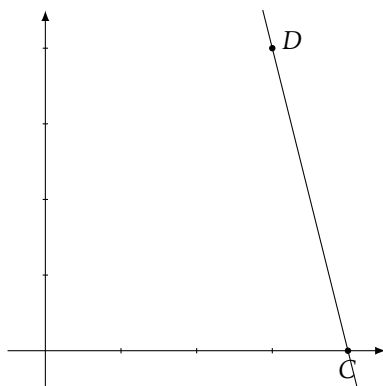
c) *Esbozo del semiplano  $4x + y - 16 > 0$ .*

El tercer y último de los semiplanos dados es  $4x + y - 16 > 0$ .

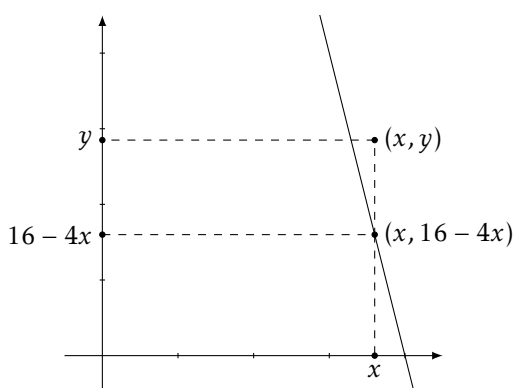
Empezamos por dibujar la frontera de este semiplano, la recta de ecuación  $4x + y - 16 = 0$ . Llamémosla  $r_3$ . Al igual que en los casos anteriores determinamos dos puntos de la recta para a continuación dibujarla.

Si hacemos  $x = 0$  en  $4x + y - 16 = 0$  obtenemos que  $y - 16 = 0$  y por tanto  $y = 16$ . Esto nos da el punto de  $r_3$   $(0, 16)$ . Si nos fijamos en los dibujos de los dos primeros semiplanos nos damos cuenta de que 16 está muy por encima de los valores en que se movía  $y$  en los dibujos. Nos conviene un punto que no nos obligue a alargar tanto el dibujo.  $4x + y - 16 = 0$  es equivalente a  $y = -4x + 16$ , y en esta ecuación observamos que se trata de una recta con

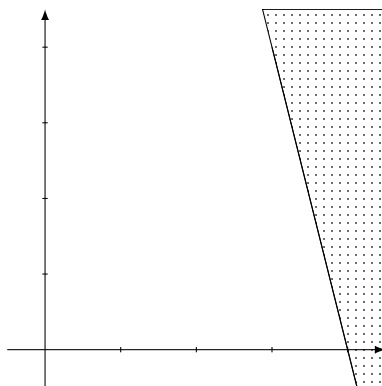
pendiente negativa, lo que significa que a medida que  $x$  crece  $y$  decrece. Si probamos ahora haciendo  $x = 3$  en  $4x + y - 16 = 0$  obtenemos  $12 + y - 16 = 0$  y por tanto  $y = 4$ . Tenemos así el punto  $D = (3, 4)$  en  $r_3$ . Si ahora hacemos  $y = 0$  en  $4x + y - 16 = 0$  obtenemos  $4x - 16 = 0$  y por tanto  $x = 4$ . Esto nos da el punto que ya habíamos obtenido previamente  $C = (4, 0)$ . Podemos dibujar ahora  $r_3$ .



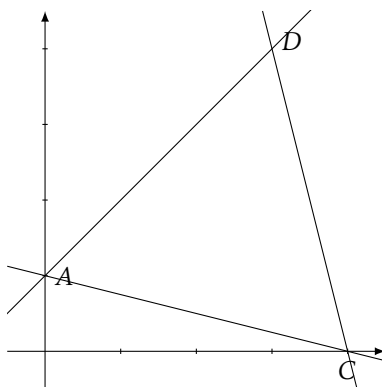
Para ver cual de los dos semiplanos determinados por  $4x + y - 16 = 0$  es el dado por  $4x + y - 16 > 0$  escribimos la ecuación de  $r_3$  en la forma  $y = f(x)$ , para lo que no hay más que despejar  $y$  en  $4x + y - 16 = 0$ . Obtenemos así  $y = 16 - 4x$ . De modo análogo, la desigualdad  $4x + y - 16 > 0$  se puede reescribir como  $y > 16 - 4x$ .



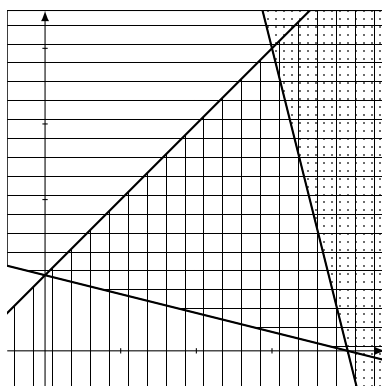
Añadimos un punteado para señalar en el dibujo el semiplano  $4x + y - 16 > 0$ , que se encuentra por encima de la recta  $4x + y - 16 = 0$



Hemos representado cada semiplano mediante un patrón de relleno. Si superponemos las tres representaciones, la intersección de los tres semiplanos contendrá los tres patrones. Empezamos por dibujar las tres rectas.



Señalamos los tres semiplanos con los correspondientes patrones de relleno.



Los tres semiplanos determinan una región no acotada del plano delimitada por dos semirrectas y un segmento de recta.

### Ejercicio 35

Una empresa produce dos productos,  $A$  y  $B$ , que vende por kilos.  $A$  se vende a 20 euros el kilo y  $B$  se vende a 30 euros el kilo. De la mayoría de ingredientes que requiere la fabricación de  $A$  y de  $B$  hay almacenada suficiente cantidad para las necesidades de producción, pero hay tres componentes  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$ , de los que la fábrica tiene sólo 1800, 900 y 700 gramos respectivamente.

$A$  lleva 2 gramos de  $i_1$ , 3 gramos de  $i_2$  y 2 gramos de  $i_3$  por kilo, mientras que  $B$  lleva 9 gramos de  $i_1$ , 1 gramo de  $i_2$  y 2 gramos de  $i_3$  por kilo.

Determinar cuantos kilos se deben fabricar de  $A$  y de  $B$  para maximizar las ventas. Asumimos que todo el producto fabricado se vende.

#### Solución

Representamos en una tabla, en gramos por kilo, las necesidades de  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  para la fabricación de  $A$  y de  $B$ .

|       | $A$ | $B$ |
|-------|-----|-----|
| $i_1$ | 2   | 9   |
| $i_2$ | 3   | 1   |
| $i_3$ | 2   | 2   |

Llamemos  $x$  a la cantidad de kilos de  $A$  que se fabrican y venden e  $y$  a la cantidad de kilos que se fabrican y venden de  $B$ . Dado que  $A$  se vende a 20 euros el kilo y  $B$  se vende a 30 euros el kilo, la venta de  $x$  kilos de  $A$  e  $y$  kilos de  $B$  reporta  $20x + 30y$  euros. Esta es la función objetivo que se nos pide maximizar. Si la llamamos  $f$  tenemos que  $f(x, y) = 20x + 30y$ .

No se venden cantidades negativas de productos, por lo que  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ .

La fabricación está limitada por la disponibilidad de los tres ingredientes. Veamos que cantidad de  $i_1$  necesitamos para fabricar  $x$  kilos de  $A$  e  $y$  kilos de  $B$ . Hay 2 gramos de  $i_1$  en cada kilo de  $A$  y 9 gramos en cada kilo de  $B$ , por lo que en  $x$  kilos de  $A$  e  $y$  kilos de  $B$  tenemos  $2x + 9y$  gramos de  $i_1$ . Y dado que de  $i_1$  se tienen 1800 gramos, ha de ser  $2x + 9y \leq 1800$ .

Análogamente, de  $i_2$  hay 3 gramos en cada kilo de  $A$  y 1 gramo en cada kilo de  $B$ , por lo que para fabricar  $x$  kilos de  $A$  e  $y$  kilos de  $B$  se requieren  $3x + y$  gramos de  $i_2$ . De  $i_2$  se dispone de 900 gramos, lo que nos da la restricción  $3x + y \leq 900$ .

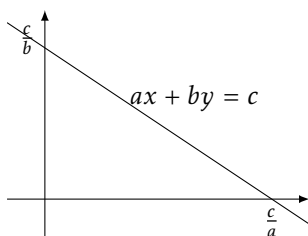
Por último, de  $i_3$  hay 2 gramos en cada kilo de  $A$  y también 2 gramos en cada kilo de  $B$ , de donde se tiene que para fabricar  $x$  kilos de  $A$  e  $y$  kilos de  $B$  se precisan  $2x + 2y$  gramos de  $i_3$ . Y como de  $i_3$  sólo tenemos 700 gramos, se tiene que verificar que  $2x + 2y \leq 700$ , lo que equivale a que  $x + y \leq 350$ .

La región factible es por tanto el conjunto de puntos del plano que verifican

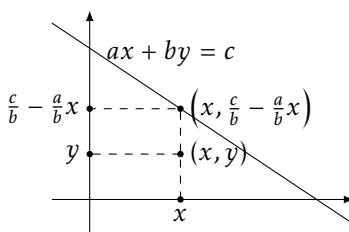
$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 2x + 9y \leq 1800 \\ 3x + y \leq 900 \\ x + y \leq 350 \end{cases}$$

Los puntos  $(x, y)$  del plano que están en la región factible deben verificar simultáneamente las cinco desigualdades. En particular deben verificar que  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ . Esto nos indica que la región factible está en el primer cuadrante.

Observamos que la 3ª, 4ª y 5ª inecuaciones son de la forma  $ax + by \leq c$  con  $a > 0$ ,  $b > 0$  y  $c > 0$ . La frontera del semiplano  $ax + by \leq c$  es la recta de ecuación  $ax + by = c$ . Llamémosla  $r$ . Haciendo en esta igualdad  $x = 0$  e  $y = 0$ , obtenemos respectivamente los puntos  $(0, \frac{c}{b})$  y  $(\frac{c}{a}, 0)$ , que son los puntos en los que  $r$  corta a los ejes.



Observamos que la recta  $ax + by = c$  también está descrita por la ecuación  $y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x$ , y que el semiplano  $ax + by < c$  es el semiplano  $y < \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x$ .



Así, un punto  $(x, y)$  está por debajo de la recta  $y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x$  si y sólo si  $y < \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x$ . Por tanto, la región factible está por debajo de las rectas  $2x + 9y = 1800$ ,  $3x + y = 900$  y  $x + y = 350$ .

Si nos fijamos en la tercera de estas rectas vemos que pasa por los puntos  $(350, 0)$  y  $(0, 350)$ . Esto supone que para la representación gráfica de este problema necesitamos dibujar al menos el rectángulo  $[0, 350] \times [0, 350]$ . Incluso utilizando el milímetro como unidad de medida el dibujo se nos sale de un papel

de tamaño estándar. Podemos fijar una escala de modo que la distancia de 0 a 350 se dibuje como un segmento de 10 centímetros. Pero antes deberíamos asegurarnos del rango en el que se mueven el resto de los puntos que tenemos que representar para estar seguros de que ninguno de ellos queda fuera del dibujo. Estos puntos son las intersecciones de las rectas entre si y con los ejes.

La intersección del eje  $x$  con la recta  $2x + 9y = 1800$  la obtenemos haciendo  $y = 0$  en  $2x + 9y = 1800$ , lo que nos da que  $2x = 1800$  y por tanto  $x = 900$ . Esto nos da el punto  $(900, 0)$ . La intersección de esta misma recta con el eje  $y$  la calculamos haciendo  $x = 0$  en  $2x + 9y = 1800$ , lo que nos da  $9y = 1800$ , y por tanto  $y = 200$ . De aquí tenemos el punto  $(0, 200)$ .

En cuanto a la recta  $3x + y = 900$ , haciendo  $y = 0$  en  $3x + y = 900$ , obtenemos que  $3x = 900$  y por tanto  $x = 300$ . Esto nos da el punto  $(300, 0)$ . Análogamente, haciendo  $x = 0$  en  $3x + y = 900$  nos queda  $y = 900$  y con ello el punto  $(0, 900)$ .

Ya vimos por otra parte que los puntos de intersección de la recta  $x + y = 350$  con los ejes son  $(350, 0)$  y  $(0, 350)$ .

Las coordenadas del punto de intersección de las rectas  $2x + 9y = 1800$  y  $3x + y = 900$  son la solución del sistema lineal

$$\begin{cases} 2x + 9y = 1800 \\ 3x + y = 900 \end{cases}$$

De la segunda ecuación tenemos que  $y = 900 - 3x$  y sustituyendo en la primera

$$\begin{aligned} 1800 &= 2x + 9y = 2x + 9(900 - 3x) = 8100 - 25x \\ \Rightarrow 25x &= 8100 - 1800 = 6300 = 63 \cdot 4 \cdot 25 \\ \Rightarrow x &= 63 \cdot 4 = 252 \end{aligned}$$

Por tanto

$$y = 900 - 3x = 900 - 3 \cdot 252 = 900 - 756 = 144$$

El punto de intersección de las rectas  $2x + 9y = 1800$  y  $3x + y = 900$  es  $(252, 144)$ .

Las coordenadas del punto de intersección de las rectas  $2x + 9y = 1800$  y  $x + y = 350$  son la solución del sistema lineal

$$\begin{cases} 2x + 9y = 1800 \\ x + y = 350 \end{cases}$$

Despejando  $y$  en la segunda ecuación obtenemos que  $y = 350 - x$ , y sustituyendo

en la primera

$$1800 = 2x + 9y = 2x + 9(350 - x) = 2x + 3150 - 9x = 3150 - 7x$$

$$\Rightarrow 7x = 3150 - 1800 = 1350$$

$$\Rightarrow x = \frac{1350}{7}$$

Por tanto

$$y = 350 - x = 350 - \frac{1350}{7} = \frac{2450 - 1350}{7} = \frac{1100}{7}$$

con lo que el punto de intersección es  $\left(\frac{1350}{7}, \frac{1100}{7}\right)$ .

Por último, el punto de intersección de las rectas  $3x + y = 900$  y  $x + y = 350$  nos lo da la solución del sistema lineal

$$\begin{cases} 3x + y = 900 \\ x + y = 350 \end{cases}$$

Restando la segunda ecuación de la primera obtenemos que

$$2x = 3x - x = 3x + y - (x + y) = 900 - 350 = 550$$

$$\Rightarrow x = 275$$

y sustituyendo en la segunda ecuación

$$y = 350 - x = 350 - 275 = 75$$

y con esto tenemos el punto de intersección  $(275, 75)$ .

Hemos calculado nueve puntos, los seis puntos de corte con los ejes más los tres puntos en los que las tres rectas se cortan:  $(900, 0)$ ,  $(0, 200)$ ,  $(300, 0)$ ,  $(0, 900)$ ,  $(350, 0)$ ,  $(0, 350)$ ,  $(252, 144)$ ,  $\left(\frac{1350}{7}, \frac{1100}{7}\right)$  y  $(275, 75)$ .

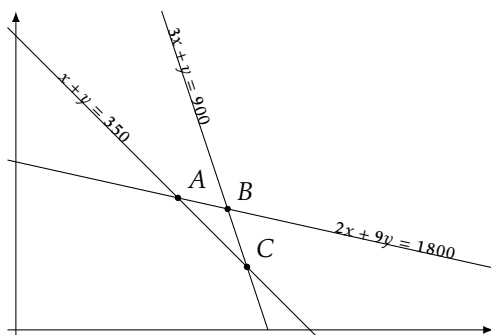
Para determinar cual de los puntos aparecerá más arriba y cuál más a la derecha calculamos los máximos valores de  $x$  y de  $y$ .

$$\text{máx} \left\{ 900, 0, 300, 0, 350, 0, 252, \frac{1350}{7}, 275 \right\} = 900$$

$$\text{máx} \left\{ 0, 200, 0, 900, 0, 350, 144, \frac{1100}{7}, 75 \right\} = 900$$

La representación gráfica de nuestro problema ocupa un cuadrado de tamaño  $900 \times 900$ , por lo que para poder dibujarlo en un cuadrado de tamaño  $10 \times 10$  necesitaremos utilizar una escala  $1 : 90$ .

Además de dibujar las tres rectas, señalamos en el dibujo el punto de intersección entre  $x + y = 350$  y  $2x + 9y = 1800$ ,  $A = \left(\frac{1350}{7}, \frac{1100}{7}\right)$ ; el punto de intersección entre  $3x + y = 900$  y  $2x + 9y = 1800$ ,  $B = (252, 144)$ ; y el punto de intersección entre  $3x + y = 900$  y  $x + y = 350$ ,  $C = (275, 75)$ .



Razonamos previamente que la región factible estaba en el primer cuadrante y que quedaba por debajo de las tres rectas, lo que supone que su frontera superior viene dada por la recta que queda más abajo. Pero qué recta queda más abajo depende de si estamos a la izquierda del punto  $A$ , entre el punto  $A$  y el punto  $C$  o a la derecha del punto  $C$ .

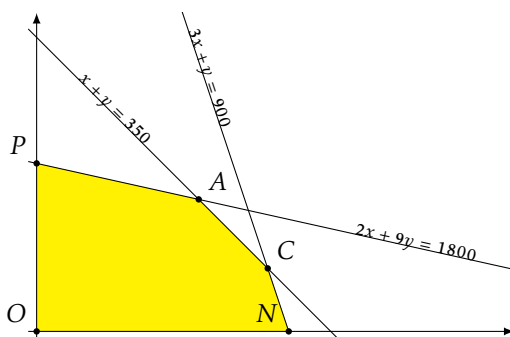
Así, el segmento de recta que es la frontera superior de la región factible a la izquierda de  $A$ , es el segmento de la recta  $2x + 9y = 1800$  entre su intersección con el eje  $y$ ,  $P = (0, 200)$  y el punto  $A = \left(\frac{1350}{7}, \frac{1100}{7}\right)$

El siguiente segmento de recta que forma la frontera superior de nuestra región es el segmento de la recta  $x + y = 350$  entre  $A = \left(\frac{1350}{7}, \frac{1100}{7}\right)$  y  $C = (275, 75)$ .

Y el último segmento de recta que forma esta frontera superior es el segmento de la recta  $3x + y = 900$  entre  $C$  y el corte con el eje  $x$ ,  $N = (300, 0)$ .

Los dos últimos segmentos que cierran la región son el que une  $P$  con  $O = (0, 0)$  y el que une  $O$  con  $N$ .

A continuación se muestra la región factible con sus vértices



La función objetivo  $f(x, y) = 20x + 30y$  toma sus valores mínimo y máximo en

los vértices de la región factible.

$$f(O) = f(0, 0) = 0$$

$$f(N) = f(300, 0) = 6000$$

$$f(C) = f(275, 75) = 7750$$

$$f(A) = f(1350/7, 1100/7) = 60000/7$$

$$f(P) = f(0, 200) = 6000$$

$7750 < 8000 = 56000/7 < 60000/7$  y por tanto el máximo valor que toma  $f$  en la región factible es  $60000/7$ . Este valor lo toma  $f$  con  $x = 1350/7$  e  $y = 1100/7$ . Esto nos indica que para maximizar las ventas se deben fabricar  $1350/7$  kilos del producto  $A$  y  $1100/7$  kilos de producto  $B$ .

### Ejercicio 36

De una progresión geométrica se sabe que la suma de sus siete primeros términos es 381. Además, entre estos siete primeros términos hay tres consecutivos tales que el segundo de ellos es el primero más 6 y el tercero menos 12. ¿Cuáles son esos siete números?

#### Solución

Una progresión geométrica se genera a partir de las sucesivas multiplicaciones de un primer término,  $a_1$ , por una constante a la que llamamos razón de la progresión,  $r$ . Así los primeros términos de la sucesión serán

$$a_1, a_1r, a_1r^2, a_1r^3, a_1r^4, a_1r^5, a_1r^6.$$

Calcular los siete números pedidos equivale a calcular  $a_1$  y  $r$ : si tenemos el primer término,  $a_1$ , y el segundo de la progresión basta compararlos para determinar  $r$ ; y si tenemos  $a_1$  y  $r$  basta realizar las correspondientes multiplicaciones para generar los términos de la progresión.

Sabemos que la suma de estos términos es 381, por lo que, si llamamos  $s_7$  a esta suma, podemos escribir

$$s_7 = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + a_1r^4 + a_1r^5 + a_1r^6 = 381$$

Por otro lado conocemos el siguiente procedimiento para calcular la suma de los primeros términos de una progresión geométrica:

$$\begin{aligned} (1-r)s_7 &= s_7 - rs_7 = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + a_1r^4 + a_1r^5 + a_1r^6 \\ &\quad - r(a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + a_1r^4 + a_1r^5 + a_1r^6) \\ &= a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + a_1r^4 + a_1r^5 + a_1r^6 \\ &\quad - a_1r - a_1r^2 - a_1r^3 - a_1r^4 - a_1r^5 - a_1r^6 - a_1r^7 \\ &= a_1 - a_1r^7 = a_1(1-r^7) \implies s_7 = \frac{a_1(1-r^7)}{1-r}, \text{ ya que } r \neq 1. \end{aligned}$$

(Si fuese  $r = 1$ , todos los términos de la sucesión serían iguales, lo que no es posible porque entre dos de ellos hay una diferencia de 6.)

Con esto llegamos a que  $\frac{a_1(1-r^7)}{1-r} = 381$ . Esta igualdad en la que aparecen  $a_1$  y  $r$  no es suficiente para determinar sus valores, pero todavía no hemos hecho uso de toda la información que proporciona el enunciado del ejercicio: se nos dice también que entre los siete primeros términos existen tres consecutivos tales que el segundo de ellos es el primero más 6 y el tercero menos 12

Llamemos a estos tres números consecutivos  $a$ ,  $b$  y  $c$ . El ser términos consecutivos de una progresión geométrica de razón  $r$  supone que  $b = ar$  y que  $c = br$ . Que «el segundo de ellos es el primero más 6 y el tercero menos 12» se traduce en que  $b = a + 6$  y  $b = c - 12$ , que añadiendo que  $b = ar$  y  $c = ar^2$  nos da que  $ar = a + 6$  y  $ar = ar^2 - 12$ . Pero entonces

$$\begin{aligned}a + 6 &= ar = ar^2 - 12 = ar \cdot r - 12 = (a + 6) \cdot r - 12 = ar + 6r - 12 \\&= a + 6 + 6r - 12 \implies 6r - 12 = 0 \implies r = 2\end{aligned}$$

Si ahora sustituimos el valor obtenido para  $r$  en la expresión obtenida para la suma tenemos que

$$\begin{aligned}381 &= \frac{a_1(1-r^7)}{1-r} = \frac{(1-2^7)}{1-2}a_1 = (2^7-1)a_1 = (128-1)a_1 = 127a_1 \\&\implies a_1 = \frac{381}{127} = 3\end{aligned}$$

y los siete primeros términos de la progresión geométrica

$a_1, a_1r, a_1r^2, a_1r^3, a_1r^4, a_1r^5, a_1r^6$  son

$$3, 6, 12, 24, 48, 96, 192.$$

¿Cuáles son los tres términos consecutivos que se mencionaban en el enunciado?

### Ejercicio 37

A Sara y Pablo, dos matemáticos con lógica perfecta, se les pide adivinar dos números. Para ello se les dice que los dos números son enteros entre 2 y 9, ambos inclusive, y que, además, pueden ser el mismo número. A Sara se le da también la suma de los dos números, mientras que el único dato extra que se le da a Pablo es su producto. Entre Sara y Pablo se establece el siguiente diálogo.

—No puedo deducir cuáles son los dos números —dice Sara.

—Yo tampoco —coincide Pablo.

—¡Ajá! ¡Ahora sí se cuáles son! —exclama Sara con entusiasmo.

—Y yo también —dice Pablo un tanto frustrado.

¿Puedes adivinar cuales son esos números? ¿Y cómo los adivinaron?

Pista 1: Construir tablas con los datos.

Pista 2: Hay dos posibles soluciones.

### Solución

A continuación se muestran las tablas de la suma y de la multiplicación de los enteros entre 2 y 9.

| + | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 2 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 |
| 3 | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
| 4 | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 5 | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 6 | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 7 | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 8 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 9 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |

| × | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 2 | 4  | 6  | 8  | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6  | 9  | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8  | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

Sara conoce la suma de los dos números, pero esto no le permite adivinarlos. De aquí deducimos que el número que le han dicho no puede ser obtenido mediante una única suma. Por ejemplo, si le hubiesen dicho «cuatro», entonces, dado que la única suma que da 4 en la tabla es  $2 + 2 = 4$ , Sara habría deducido que el par sería (2, 2).  $18 = 9 + 9$ , y no hay ninguna otra suma en la tabla que de 18, por lo que el número comunicado a Sara tampoco puede ser 18. La conmutatividad de la suma hace que la suma de dos números se pueda escribir de dos maneras distintas. Por ejemplo  $5 = 2 + 3 = 3 + 2$ . Esto hace que 5 aparezca dos veces en la tabla, aunque los dos cincos corresponden a la suma de los mismos dos números. Por eso podemos descartar que el número que conoce Sara sea 5. Lo mismo pasa con 17. Todos los demás números aparecen en la tabla tres veces o más, lo que supone que se pueden obtener como la suma de al menos dos pares distintos. Pablo, que tiene una lógica no menos perfecta que la de Sara, sabe todo esto en cuanto ella reconoce que no puede deducir el par.

Se muestran a continuación las tablas de la suma y el producto en las que se han suprimido las casillas correspondientes a sumas que se pueden obtener de una única manera.

| + | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 2 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 |
| 3 | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
| 4 | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 5 | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 6 | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 7 | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 8 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 9 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |

| × | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 2 | 4  | 6  | 8  | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6  | 9  | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8  | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

Con la información proporcionada por la declaración de Sara, Pablo afirma que no puede determinar los dos números cuyo producto conoce. El razonamiento que hemos hecho con la suma es válido ahora con el producto. Pablo podría determinar la solución si el número que conoce se pudiese expresar de una única manera como producto de dos números. Dado que ese no es el caso, el número proporcionado a Pablo se puede expresar como producto de otros dos números al menos de dos maneras distintas. Las tablas que quedan después de eliminar las casillas correspondientes a los productos que se pueden obtener de una única manera son las siguientes.

| + | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 2 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 |
| 3 | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
| 4 | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 5 | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 6 | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 7 | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 8 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 9 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |

| × | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 2 | 4  | 6  | 8  | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6  | 9  | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8  | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

En este punto Sara afirma que ya tiene el par de números buscado. ¿Puede ser 7 el número que le dieron? 7 se puede expresar como suma únicamente con 3 y 4 como sumandos. En ese caso el número comunicado a Pablo habría sido  $3 \times 4 = 12$ . ¿Esta información le permitiría a Pablo determinar el par sabiendo que Sara ya lo ha hecho? 12 se puede obtener también como el producto de 2 y 6. Pero la suma de 2 y 6 es 8, por lo que en ese caso el número proporcionado a Sara habría sido 8. Pero 8 se puede expresar como suma de dos maneras

distintas y en ese caso Sara no habría podido afirmar que conocía el par. Así, si Pablo recibe como pista el 12, después de oír a Sara decir que ya lo tiene, él puede deducir que necesariamente el par es  $(3, 4)$ .

El número proporcionado a Sara no puede ser ni 8, ni 10 ni 11 porque los tres se pueden obtener como sumas de dos maneras distintas, por lo cual Sara no habría podido deducir la solución.

En caso de ser 9 la pista para Sara, ella habría deducido que el par es  $(3, 6)$ , cuyo producto es 18. 18 también se puede obtener como el producto de 2 y 9. Pero en este caso el número comunicado a Sara habría sido  $9 + 2 = 11$ , posibilidad que ya hemos descartado. Esto significa que si el número que recibe Sara es el 9, entonces ella puede deducir que el par  $(3, 6)$  es la solución y Pablo también.

Si Sara hubiese recibido el 12 como pista, hubiera podido deducir que el par era  $(6, 6)$ . En ese caso la pista recibida por Pablo habría sido 36, que se puede expresar como producto de dos maneras distintas. Esto no habría permitido a Pablo deducir el par. No puede ser por tanto que la pista recibida por Sara haya sido 12.

13 se puede expresar como suma únicamente con el par  $(4, 9)$ , cuyo producto también es 36. En este caso Pablo estaría en la misma situación que si Sara hubiese recibido 12 como pista, lo que hemos visto que no es posible.

En resumen, asumiendo que Sara y Pablo razonan con una lógica perfecta, el diálogo entre ellos es posible únicamente si Sara recibe como pista, o bien 7 o bien 9; y esto ocurre si el par de números buscado es  $(3, 4)$  o  $(3, 6)$  respectivamente.

### Ejercicio 38

Tenemos 8 monedas de las que sabemos que una y sólo una es falsa. La única característica que nos permite identificar la moneda falsa es su peso, que es inferior al de una moneda auténtica. Si disponemos de una balanza de dos platos, ¿cómo podemos identificar la moneda falsa con dos pesadas?

#### *Solución*

Podemos colocar la mitad de las monedas en un plato y la otra mitad en el otro plato. Aquel que contenga la moneda falsa se elevará mientras el otro bajará, dado que el peso de tres monedas auténticas y una falsa es inferior al de cuatro monedas auténticas.

Con esto habremos identificado cuatro monedas entre las que se encuentra la falsa. Si ahora colocamos dos de estas monedas en un plato y las otras dos en el otro, será de nuevo el plato que se eleva el que señala donde está la moneda falsa. Pero en ese plato hay dos monedas, una de las cuales sabemos que es falsa, pero no cual.

Ahora sabemos que empezar colocando la mitad de las monedas en un plato y la otra mitad en el otro no nos permite solucionar el problema en dos pesadas. ¿Podremos acaso obtener alguna información de colocar distintas cantidades de monedas en los platos? Un poco de álgebra nos ayuda. Supongamos que en un plato colocamos una cantidad  $n$  de monedas y en el otro una cantidad mayor  $n+k$  con  $k \geq 1$ . Esto es, en un plato hay al menos una moneda más que en el otro. Sean además  $m$  el peso de las monedas auténticas y  $m'$  el de la falsa.

El mínimo peso en el plato con  $n+k$  monedas corresponde al caso en que  $n+k-1$  monedas son auténticas y una es falsa, esto es

$$(n+k-1)m + m'$$

mientras que el máximo peso en el plato con  $n$  monedas corresponde al caso en que todas sean auténticas, esto es

$$nm$$

Pero

$$(n+k-1)m + m' = nm + (k-1)m + m' \geq nm + m' > nm.$$

Esto es, el plato con más monedas siempre va a pesar más que el plato con menos monedas, con independencia de donde esté la moneda falsa. Por tanto si queremos obtener alguna información hemos de colocar el mismo número de monedas en los dos platos. Pero hemos visto que colocar cuatro y cuatro no nos sirve. ¿Y si probamos con tres y tres?

Dejamos entonces dos monedas aparte y las otras seis las repartimos equitativamente entre los dos platos.

Si los dos platos pesan lo mismo eso nos indicará que la moneda falsa ha quedado fuera de la pesada. En ese caso será suficiente con comparar los pesos de las dos monedas que hemos dejado fuera. Habremos localizado la moneda falsa con dos pesadas.

Si un plato se eleva respecto del otro, eso nos indicará que contiene una moneda falsa. En tal caso tomaremos las tres monedas de ese plato, apartaremos una y compararemos las otras dos. Si son iguales sabremos que la apartada es la falsa, si no la que esté en el plato que se eleve será la falsa. Habremos localizado la moneda falsa en dos pesadas también.

## Ejercicio 39

Un peculiar genio del mal disfruta eliminando a aquellos que no superan sus desafíos lógicos. No es que sienta simpatía por los que resuelven sus pruebas, pero los deja vivir, de momento.

En una de las salas del laberinto nos encontramos con dos puertas de las que cuelgan los siguientes carteles:

I

Tras esta puerta está la salida, y tras la otra un tigre.

II

Tras una de estas dos puertas está la salida, y tras una de estas dos puertas hay un tigre.

En ese momento escuchamos la implacable voz del genio (del mal) que instruye a su reo:

—No te preocupes, donde esté la salida no habrá un tigre esperándote. O llegas a la salida o llegas al tigre, pero no a los dos. Debes tener en cuenta de todas formas que la información de una de las puertas es verdadera y de la otra falsa. ¿Serías capaz de adivinar la puerta que lleva a la salvación?

### Solución

Un letrero es verdadero y el otro falso. En particular el letrero de la primera puerta es verdadero o es falso. Podemos intentar por ello un razonamiento por casos: vemos qué se deduce de que el primer letrero sea verdadero y qué se deduce de que sea falso.

Supongamos pues que el letrero de la primera puerta es verdadero. En el mismo se hacen dos afirmaciones: que la puerta I conduce a la salida y que la puerta II esconde al tigre. Pero en ese caso la afirmación de la puerta II sería también verdadera, lo que sabemos que no puede ser porque estaría en contradicción con las indicaciones del genio (del mal).

El letrero de la primera puerta ha de ser por tanto falso. Dado que en el se hacen dos afirmaciones, para que sea falso será suficiente con que una de esas afirmaciones lo sea. Esto es, tras la puerta I no está la salida o tras la puerta II no hay un tigre, lo que equivale a que tras la puerta I hay un tigre o tras la puerta II está la salida.

Si tras la puerta I hay un tigre, debemos abrir la puerta II, y si tras la puerta II está la salida, también debemos abrir la puerta II.

### Ejercicio 40

Sean  $p_1, p_2, p_3, p_4$  y  $p_5$  puntos distintos en la recta real. Si las distancias entre los distintos pares de estos puntos, ordenadas de menor a mayor, son

2, 4, 5, 7, 8,  $k$ , 13, 15, 17 y 19,

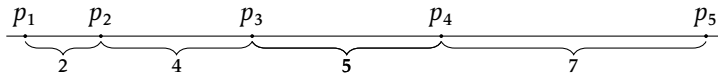
¿cuál es el valor de  $k$ ?

### Solución

Dado que se trata de puntos distintos, podemos asumir que

$$p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p_5$$

y podemos empezar por probar con 2, 4, 5, 7 como distancias entre puntos consecutivos. Esto es, ¿es la siguiente configuración compatible con los datos proporcionados?



De estar los cinco puntos distribuidos de esta manera tendríamos que la máxima distancia entre ellos sería  $2 + 4 + 5 + 7 = 18$  y no 19, que es la mayor distancia que aparece en la lista proporcionada. Además, por ejemplo, la distancia entre  $p_1$  y  $p_3$  sería  $2 + 4 = 6$ , que no está en la lista.

De la observación anterior se sigue, por un lado, que la mayor distancia de la lista, 19, ha de ser la distancia entre el primer y el quinto punto, y por otra, que 19 ha de ser también la suma de las cuatro distancias entre puntos consecutivos.

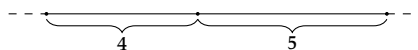
Podemos notar que ni 13, ni 15 ni 17 pueden ser distancias entre puntos consecutivos, ya que en ese caso la menor cantidad que sumarían las cuatro distancias intermedias sería  $2 + 4 + 5 + 13 = 24 > 19$ .

Por otro lado 2 ha de ser necesariamente una distancia entre puntos consecutivos, ya que lo contrario supondría la existencia de una distancia entre puntos consecutivos menor que 2.

19 es la suma de cuatro distancias entre puntos consecutivos. 17 por estar en la lista, es la longitud de un segmento cuyos dos extremos están en el conjunto  $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ . La única forma de que tanto 19 como 17 estén en la lista es que o bien la distancia entre  $p_1$  y  $p_2$ , o bien la distancia entre  $p_4$  y  $p_5$  sean iguales a 2

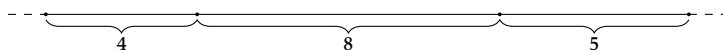
17 ha de ser pues suma de tres distancias entre puntos consecutivos, la mínima de las cuales tiene que ser mayor o igual que 4. Esto nos da como única posibilidad que un segmento de longitud 17 sea la concatenación de segmentos de longitudes 4, 5 y 8.

¿Puede ser la siguiente configuración parte de la solución?



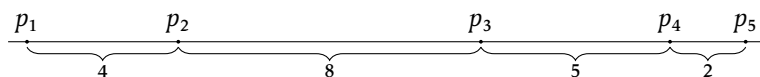
Esta configuración nos proporciona un segmento de longitud 9, por lo que sería  $k = 9$ . De esta forma a la izquierda del segmento de longitud 4 no podemos tener ni un segmento de longitud 2 ni un segmento de longitud 8 porque  $2 + 4 = 6$  y  $8 + 4 = 12$  no estarían en la lista de distancias. Los segmento de longitud 2 y 8 tendrían que estar a la derecha del segmento de longitud 5. Pero esto supondría la existencia de un segmento de longitud 10 que tampoco estaría en la lista.

Queda así descartada la posibilidad de que los segmentos de longitudes 4 y 5 sean consecutivos, lo que nos lleva a una configuración como la siguiente:



Con esta configuración tenemos un segmento de longitud 4 seguido por un segmento de longitud 8 lo que proporciona un segmento de longitud 12 y  $k = 12$ .

Por otro lado al segmento de longitud 4 no lo puede preceder un segmento de longitud 2 porque en ese caso podríamos construir un segmento de longitud 6, que no estaría en la lista de distancias. Por tanto el segmento de longitud 2 debe ser el último:



Las distancias en este caso son

$$\{4, 12, 17, 19, 8, 13, 15, 5, 7, 2\}$$

que, ordenadas de mayor a menor nos da

$$\{2, 4, 5, 7, 8, 12, 13, 15, 17, 19\}.$$



## CAPÍTULO 3

### **Análisis**

*Luis López García*  
*Teresita del Niño Jesús Talavera Santana*  
*José Vico Ibáñez*



## Ejercicio 41

Responde con Verdadero o Falso a las siguientes cuestiones justificando tu respuesta:

- a) En las funciones racionales, siempre hay asíntotas verticales en los puntos que no están en el dominio.
- b) Si una función presenta una discontinuidad de salto infinito significa que hay asíntota vertical.
- c) Si una función presenta asíntota horizontal en  $+\infty$ , también tendrá asíntota horizontal en  $-\infty$ .
- d) Para calcular el límite de una función en un punto  $x = a$  es necesario que ese punto pertenezca al dominio.
- e) Si una función continua en  $\mathbb{R}$  es estrictamente creciente en su dominio, entonces se cumple que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ .
- f) Para que una función racional tenga asíntotas horizontales es necesario que el grado del numerador sea menor que el grado del denominador.
- g) Todas las funciones logarítmicas pasan por un punto fijo.
- h) Todas las funciones exponenciales pasan por un punto fijo.

### Solución

- a) Falso. Pueden aparecer discontinuidades evitables.
- b) Verdadero. La definición de asíntota vertical es equivalente a la definición de discontinuidad de salto infinito.
- c) Falso. Esto ocurre en las funciones racionales, pero en funciones de tipo exponencial o logarítmico no ocurre siempre.
- d) Falso. No es necesario que el punto esté en el dominio. Téngase en cuenta, por ejemplo, que para buscar las asíntotas verticales calculamos el límite de puntos que no están en el dominio de la función.
- e) Falso. Cuando una función presenta una asíntota horizontal puede ser creciente en todo su dominio pero su límite en  $+\infty$  es finito.
- f) Falso. También hay asíntotas horizontales si el grado del numerador es igual al grado del denominador.
- g) Verdadero. Dado que  $\log_a 1 = 0$ , todas las funciones logarítmicas pasan por el punto de coordenadas  $(1, 0)$ .
- h) Verdadero. Dado que  $a^0 = 1$ , todas las funciones exponenciales pasan por el punto de coordenadas  $(0, 1)$ .

## Ejercicio 42

Indica si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes, justificando la respuesta:

- a) "Si  $f(a) = g(a)$ , con  $f(x) \neq g(x) \implies \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ "
- b) "No existe una función racional que pase por el origen y con asíntotas vertical en  $x = 1$  y oblícua de pendiente 5"
- c) "Si  $f(x)$  es continua en  $[a, b] \implies f(x)$  es derivable en  $(a, b)$ "
- d) "Sea  $f(x)$  tal que  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \implies f(x)$  es continua en  $x = a$ "
- e) " $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 - e^{3/x^4})^{x^4}$  es una indeterminación"
- f) "La recta tangente a la curva  $f(x) = x^3 - x + 1$  en  $x = 0$  tiene de pendiente  $-1$ "
- g) "Sea  $f(x) = \sin x$ , entonces la derivada  $k$ -ésima  $f^{(k)}(x)$  coincide con  $f(x)$  si  $k = 5n, n \in \mathbb{N}$ "
- h) "Si  $n \in \mathbb{N} \implies \lim_{x \rightarrow \infty} [x^{-n} \cdot \ln(x)] = \frac{1}{n}$ "
- i) "Si tenemos dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  continuas en  $[a, b]$  tales que el signo de  $f(a) \cdot g(a)$  es distinto del signo de  $f(b) \cdot g(b) \implies f(x)$  y  $g(x)$  cumplen las condiciones del teorema de Bolzano"
- j) "La función  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  toma el mismo valor en los extremos de  $[-1, 1]$  pero no existe ningún punto en ese intervalo en el que la derivada de la función se anule, por tanto, contradice el teorema de Rolle"
- k) "Se puede determinar la función  $f(x)$  sabiendo que  $f''(x) = 2$ ,  $f'(-1) = -3$  y  $f(0) = 7$ "
- l) "Podemos obtener una expresión para la derivada  $n$ -ésima de  $f(x) = \frac{1}{x}$ "

## Solución

- a) "Si  $f(a) = g(a)$ , con  $f(x) \neq g(x) \implies \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ "  
Falso. Por ejemplo, una función puede ser continua en  $x=a$  y otra tener una discontinuidad evitable en  $x=a$ .
- b) "No existe una función racional que pase por el origen y con asíntotas vertical en  $x = 1$  y oblícua de pendiente 5"  
Falso. Por ejemplo la función  $f(x) = \frac{5x^2}{x-1}$  lo cumple.

- c) "Si  $f(x)$  es continua en  $[a, b] \implies f(x)$  es derivable en  $(a, b)$ "  
Falso.  $f(x)$  puede ser continua y tener un punto anguloso en ese intervalo, por ejemplo,  $f(x) = \left|x - \frac{a+b}{2}\right|$ .
- d) "Sea  $f(x)$  tal que  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \implies f(x)$  es continua en  $x = a$ "  
Falso. La existencia del límite no implica que la función exista en ese punto, un ejemplo son las discontinuidades evitables.
- e) " $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 - e^{3/x^4})^{x^4}$  es una indeterminación"  
Verdadero, es del tipo  $1^\infty$ .
- f) "La recta tangente a la curva  $f(x) = x^3 - x + 1$  en  $x = 0$  tiene de pendiente  $-1$ "  
Verdadero,  $m = f'(0) = -1$
- g) "Sea  $f(x) = \sin x \implies f^{(k)}(x) = f(x)$  si  $k = 5n, n \in \mathbb{N}$ "  
Falso  
 $f^{(5)}(x) = \cos x$
- h) "Si  $n \in \mathbb{N} \implies \lim_{x \rightarrow \infty} [x^{-n} \cdot \ln(x)] = \frac{1}{n}$ "  
Falso, es cero.
- i) "Si tenemos dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  continuas en  $[a, b]$  tales que el signo de  $f(a) \cdot g(a)$  es distinto del signo de  $f(b) \cdot g(b) \implies f(x)$  y  $g(x)$  cumplen las condiciones del teorema de Bolzano"  
Falso. Una de las funciones puede tener el mismo signo en  $a$  y  $b$ , no cumpliendo las condiciones del Teorema de Bolzano.
- j) "La función  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  toma el mismo valor en los extremos de  $[-1, 1]$  pero no existe ningún punto en ese intervalo en el que la derivada de la función se anule, por tanto, contradice el teorema de Rolle"  
Falso. Un teorema no se contradice, la función no es continua en  $[-1, 1]$ , por lo que no cumple las condiciones del Teorema de Rolle.
- k) "Se puede determinar la función  $f(x)$  sabiendo que  $f''(x) = 2$ ,  $f'(-1) = -3$  y  $f(0) = 7$ "  
Verdadero.  $f(x) = x^2 - x + 7$ .
- l) "Podemos obtener una expresión para la derivada  $n$ -ésima de  $f(x) = \frac{1}{x}$ "  
Verdadero.  $f^n(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$ .

### Ejercicio 43

Calcula el valor de los parámetros para que los siguientes límites sean finitos y calcula el valor de dichos límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} + e^{-x} + b}{1 - \cos x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - ax + b}{x^2 - 4}$$

#### Solución

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} + e^{-x} + b}{1 - \cos x}$$

Comenzamos sustituyendo para calcular el límite y, al ser el denominador igual a 0, el numerador también tendrá que ser 0 para impedir que el límite sea infinito:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} + e^{-x} + b}{1 - \cos x} = \frac{2 + b}{0} \Rightarrow 2 + b = 0 \Rightarrow b = -2$$

Sustituimos el valor de  $b$  y resolvemos la indeterminación del tipo  $\frac{0}{0}$  utilizando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{L'Hôpital} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^{ax} - e^{-x}}{\sin x} = \frac{a - 1}{0}$$

De nuevo tenemos que el denominador vale 0, luego el numerador también tendrá que tomar ese valor para impedir que el límite sea infinito:

$$\frac{a - 1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow a = 1$$

Concluimos que  $a = 1$  y  $b = -2$  para que el límite sea finito. Calculamos el límite sustituyendo los valores de  $a$  y  $b$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} &= \frac{0}{0} \xrightarrow{L'Hôpital} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{0}{0} \\ &\xrightarrow{L'Hôpital} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2 \end{aligned}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - ax + b}{x^2 - 4}$$

Sustituimos para calcular el límite y, al ser el denominador igual a 0, el numerador también tendrá que ser 0 para que el límite sea finito:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - ax + b}{x^2 - 4} = \frac{-8 + 2a + b}{0} \Rightarrow -8 + 2a + b = 0$$

Suponemos que el numerador vale 0 y resolvemos la indeterminación del tipo  $\frac{0}{0}$  utilizando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - ax + b}{x^2 + 4x + 4} = \frac{0}{0} \xRightarrow{L'Hôpital} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - a}{2x + 4} = \frac{12 - a}{0}$$

De nuevo tenemos que el denominador vale 0, luego el numerador también tendrá que tomar ese valor para intentar que el límite sea finito:

$$\frac{12 - a}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow a = 12 \xRightarrow{-8+2a+b=0} -8 + 24 + b = 0 \Rightarrow b = -16$$

Concluimos que  $a = 12$  y  $b = -16$  para que el límite pueda ser finito. Calculamos el límite sustituyendo los valores de  $a$  y  $b$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 12x - 16}{x^2 + 4x + 4} &= \frac{0}{0} \xRightarrow{L'Hôpital} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - 12}{2x + 4} = \frac{0}{0} \\ &\xRightarrow{L'Hôpital} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{6x}{2} = \frac{-12}{2} = -6 \end{aligned}$$

#### Ejercicio 44

Si la derivada de una función viene dada por la expresión  $f'(x) = (x-1)^3(x-5)$ , determinar:

- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Los valores en los cuales la  $f(x)$  tiene máximos relativos, mínimos relativos o puntos de inflexión
- La función  $f(x)$  si  $f(0) = 0$

#### Solución

- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

En los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función se cumple:

$$\text{Si } f'(x) = (x-1)^3(x-5) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ es creciente}$$

$$\text{Si } f'(x) = (x-1)^3(x-5) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente}$$

Por tanto buscamos las posibles soluciones de la ecuación  $(x-1)^3(x-5) = 0$  obteniendo  $x_1 = 1$  y  $x_2 = 5$ .

El signo de la derivada de la función se mantiene constante en cada uno de los siguientes intervalos:

$$(-\infty, 1) \quad (1, 5) \quad (5, \infty)$$

Por tanto, podemos elegir un representante de cada uno de ellos para averiguar el signo de  $f'(x)$ , por ejemplo:

$$f'(0) > 0, \quad f'(4) < 0, \quad f'(6) > 0$$

La función  $f(x)$  crece  $(-\infty, 1) \cup (5, \infty)$  y decrece  $(1, 5)$ .

- b) Los valores en los cuales la  $f(x)$  tiene máximos relativos, mínimos relativos o puntos de inflexión.

Los posibles puntos notables estarán en las raíces de la derivada primera, esto es,  $x_1 = 1$  y  $x_2 = 5$ . Hallamos la derivada segunda:

$$f''(x) = 3(x-1)^2(x-5) + (x-1)^3$$

y sustituimos los valores anteriores. Se obtiene  $f''(1) = 0$  y  $f''(5) > 0$ , por tanto  $x = 5$  es un mínimo y  $x = 1$  puede ser un punto de inflexión. Además, si resolvemos la ecuación  $f''(x) = 0$ , se obtiene que  $x = 4$  puede ser otro posible punto de inflexión.

Hallamos la derivada tercera y comprobamos:

$$\begin{aligned} f'''(x) &= 6(x-1)(x-5) + 3(x-1)^2 + 3(x-1)^2 \\ &= 6(x-1)(x-5) + 6(x-1)^2 \\ &= 12x^2 - 48x + 36 \end{aligned}$$

$f'''(1) = 0$  y  $f'''(4) \neq 0$ , es decir, en  $x = 4$  hay un punto de inflexión y en  $x = 1$  no sabemos. Para averiguarlo, tendríamos que obtener el orden de la primera derivada que no se anule en  $x = 1$ , si fuese par, sería un máximo o mínimo relativo, y si fuese impar, sería un punto de inflexión. Calculemos  $f^{iv}(x) = 24x - 48$  y  $f^{iv}(1) < 0$ , por lo que en  $x = 1$  hay un máximo relativo.

Sus segundas coordenadas las hallaremos en el siguiente apartado.

- c) La función  $f(x)$  si  $f(0) = 0$ .

Para hallar la  $f(x)$  a partir de la  $f'(x)$  debemos integrar  $f'(x)$

$$\begin{aligned} \int ((x-1)^3(x-5))dx &= \int (x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 16x + 5)dx \\ &= \frac{x^5}{5} - 2x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 5x + c \end{aligned}$$

como  $f(0) = 0$  se obtiene que  $c = 0$ . Por lo tanto la función buscada es

$$f(x) = \frac{x^5}{5} - 2x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 5x$$

Ahora calculamos las ordenadas de los dos puntos notables, es decir, el mínimo relativo estará en  $P(5, -50)$ , el máximo relativo en  $Q(1, 11/5)$  y el punto de inflexión en  $R(4, -156/5)$ .

### Ejercicio 45

De una función  $f(x)$  solo conocemos su derivada, que aparece en la figura 3.1.

- Determinar y clasificar los puntos críticos de  $f(x)$ .
- Estudiar los intervalos de crecimiento de  $f(x)$ .
- ¿Tiene  $f(x)$  puntos de inflexión?

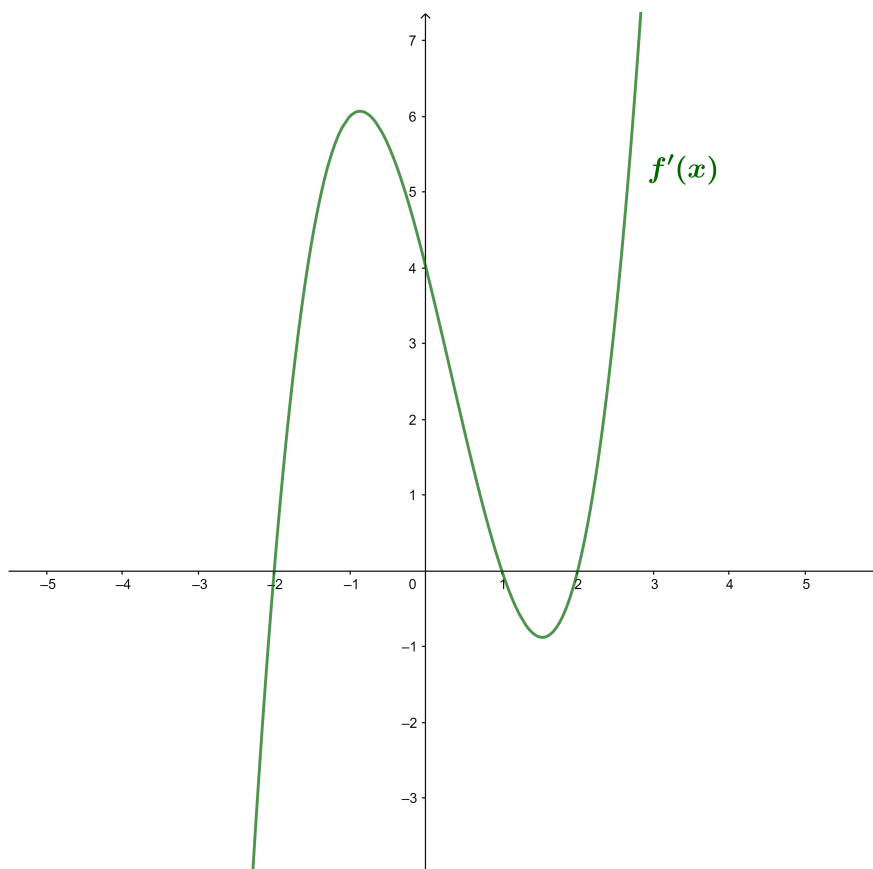


Figura 3.1:  $f'(x)$ : derivada de la función  $f(x)$ .

### Solución

- Determinar y clasificar los puntos críticos de  $f(x)$ .

Los puntos críticos de  $f(x)$  anulan la primera derivada. Como tenemos la gráfica de  $f'(x)$ , podemos observar que  $f'(x) = 0$  en  $x = -2$ ,  $x = 1$  y  $x = 2$ . Veamos cuáles son máximos relativos y cuáles son mínimos relativos.

En  $x = -2$ ,  $f'(x)$  pasa de ser negativa (está por debajo del eje de ordenadas) a positiva (encima del eje), lo que se traduce en que  $f(x)$  pasa de ser decreciente a creciente, y por lo tanto, en  $x = -2$  hay un mínimo relativo. En  $x = 2$  podemos hacer el mismo razonamiento y también habrá un mínimo relativo.

Por el contrario, en  $x = 1$ ,  $f'(x)$  pasa de ser positiva ( $f(x)$  creciente) a negativa ( $f(x)$  decreciente) y entonces en  $x = 1$  existirá un máximo relativo.

- b) Estudiar los intervalos de crecimiento de  $f(x)$ .

Sabemos que si  $f'(x) > 0$  la función  $f(x)$  es creciente, y si  $f'(x) < 0$  la función  $f(x)$  es decreciente. En la gráfica de  $f'(x)$  vemos que en los intervalos  $(-\infty, -2) \cup (1, 2)$  la derivada es negativa, y entonces  $f(x)$  es decreciente. En  $(-2, 1) \cup (2, \infty)$  la derivada  $f'(x) > 0$ , y por lo tanto, la función  $f(x)$  es creciente.

- c) ¿Tiene  $f(x)$  puntos de inflexión?

En los puntos de inflexión se anula la segunda derivada y hay un cambio de curvatura.

La gráfica de  $f'(x)$  tiene un máximo relativo cerca de  $x = -1$  y un mínimo relativo en  $x = 3/2$ , lo que supone que su derivada se anula en esos puntos, y como la derivada de la derivada es la segunda derivada, puede existir un punto de inflexión.

La segunda derivada es positiva a la izquierda de  $x = -1$  porque la pendiente de la recta tangente a la función  $f'(x)$  es positiva, y a la derecha de  $x = -1$  es negativa ( $f''(x) < 0$ ) y se produce un cambio de curvatura, por lo cerca de  $x = -1$  existe un punto de inflexión.

En  $x = 3/2$  se produce la situación contraria, trazando rectas tangentes a su izquierda y su derecha, y analizando su pendiente, podemos observar que pasamos de  $f''(x) < 0$  a  $f''(x) > 0$  produciéndose un cambio la curvatura de  $f(x)$ . En  $x = 3/2$  también existe un punto de inflexión.

## Ejercicio 46

Una tienda de iluminación vende bombillas tipo led al detalle y al por mayor. El precio en euros en función del número de bombillas adquirido viene dado por:

$$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } x \leq 10 \\ \sqrt{9x^2 + 700} & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

- a) El comercial afirma que, a partir de una compra de más de 10 bombillas, cuantas más compres más bajo será el precio por unidad, ¿es esto cierto?

- b) Para disfrutar del descuento de comprar al por mayor (más de 10 unidades) es necesario un carnet de autónomo. ¿Hay diferencia de precio si se compran 10 bombillas como cliente al detalle o al por mayor? ¿Qué es más ventajoso?
- c) Si se comprasen muchas bombillas, ¿a cuánto saldría el precio de cada bombilla?

### Solución

- a) Estudiamos la monotonía de  $\frac{f(x)}{x}$  (precio por unidad) para valores mayores de 10:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \frac{\sqrt{9x^2 + 700}}{x} \\ \left(\frac{f(x)}{x}\right)' &= \frac{\frac{18x^2}{2\sqrt{9x^2+700}} - \sqrt{9x^2+700}}{x^2} \\ &= \frac{9x^2 - (9x^2 + 700)}{x^2 \cdot \sqrt{9x^2 + 700}} \\ &= \frac{-700}{x^2 \cdot \sqrt{9x^2 + 700}}\end{aligned}$$

Como esta derivada no se puede anular y siempre es negativa, podemos concluir que el precio por unidad es una función decreciente. Luego la afirmación del comercial es cierta.

- b) Estudiamos la continuidad de la función en  $x = 10$ .  $f(x)$  será continua en  $x = 10$  si existen, y coinciden, la imagen y el límite de la función en  $x = 10$ . Calculamos:

$$\begin{aligned}f(10) &= 40 \\ \lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 10^-} 4x = 40 \\ \lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 10^+} \sqrt{9x^2 + 700} = 40\end{aligned}$$

Como  $f(10) = \lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) = 40$ , podemos decir que  $f(x)$  es continua en  $x = 10$ . No hay diferencia de precio si se aplica una tarifa u otra en la compra de 10 bombillas.

- c) Calculamos el límite en  $+\infty$  de la función, dividiendo por  $x$  (el número de unidades) para calcular el precio unitario si se compran muchas bombillas:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 700}}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\sqrt{9}}{1} = 3$$

Si se compran muchas bombillas el precio se aproximará a los 3 €.

## Ejercicio 47

El beneficio en miles de euros que obtiene una empresa por la fabricación de  $x$  unidades de dos tipos de ordenadores distintos viene dado por las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{1}{90}(-x^2 + 100x - 1600)$$
$$g(x) = 10x - x^2 - 21$$

- a) Representa gráficamente las dos funciones.
- b) ¿Cuántas unidades de cada tipo de ordenador hay que fabricar para que no se produzcan pérdidas?
- c) ¿Cuál es el mayor beneficio posible? ¿Cuántos ordenadores de cada tipo deben fabricarse?

### Solución

- a) Gráfica de  $f(x) = \frac{1}{90}(-x^2 + 100x - 1600)$

Calculamos el vértice

$$V_x = \frac{-\frac{100}{90}}{2 \cdot \frac{-1}{90}} = 50$$
$$V_y = \frac{1}{90}(-50^2 + 100 \cdot 50 - 1600) = 10$$

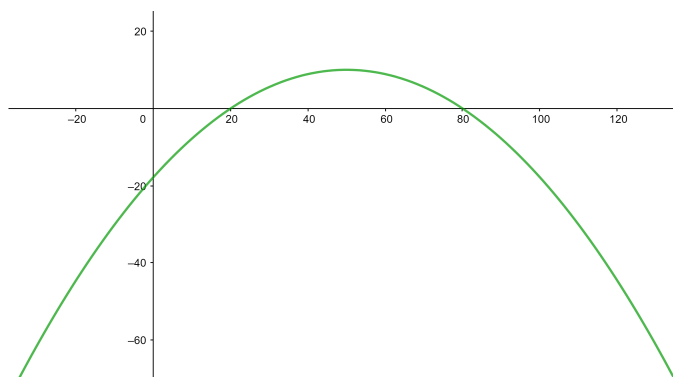
Calculamos puntos de corte:

Eje X

$$f(x) = 0 \implies \frac{1}{90}(-x^2 + 100x - 1600) = 0 \implies x_1 = 20, x_2 = 80$$

Eje Y

$$y_0 = \frac{-160}{9}$$



**Figura 3.2:** Gráfica de  $f(x) = \frac{1}{90}(-x^2 + 100x - 1600)$ .

Gráfica de  $g(x) = 10x - x^2 - 21$

Calculamos el vértice

$$V_x = \frac{-10}{-2} = 5$$

$$V_y = 10 \cdot 5 - 5^2 - 21 = 4$$

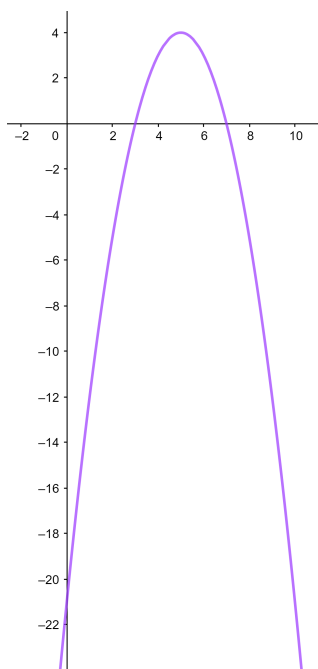
Calculamos puntos de corte:

Eje X

$$g(x) = 0 \implies 10x - x^2 - 21 = 0 \implies x_1 = 3; x_2 = 7$$

Eje Y

$$y_0 = -21$$



**Figura 3.3:** Gráfica de  $g(x) = 10x - x^2 - 21$ .

- b) Se producirán pérdidas cuando la gráfica esté por debajo del eje  $X$ .

En el primer caso no se producirán pérdidas entre 20 y 80 ordenadores de ese tipo y, en el segundo caso no se producirán pérdidas si se producen entre 3 y 7.

- c) En las parábolas convexas el máximo se alcanza en los vértices, por tanto, para obtener el beneficio máximo hay que fabricar 50 ordenadores del primer modelo y 5 del segundo. El beneficio máximo será el resultado de sumar los dos beneficios (la suma de las coordenadas en  $y$  de los vértices:  $10 + 4 = 14$  miles de euros; el beneficio máximo será de 14000 €)

### Ejercicio 48

Los beneficios anuales de una empresa, en cientos de miles de euros, vienen dados por la función  $f(t) = \frac{\ln(t)}{t}$ , donde  $t$  es el tiempo transcurrido desde su creación en años.

- a) ¿Cuáles fueron los beneficios de la empresa el primer año? ¿Y al cabo de 5 años?
- b) ¿Cuándo se alcanzará y cuál será el beneficio máximo?

- c) A partir del 3 año una auditoría avisa que los beneficios anuales irán decreciendo de manera continuada, ¿es esto cierto?
- d) Con el paso del tiempo, ¿los beneficios serán negativos (la empresa entra en pérdidas) o se estabilizan?

### Solución

- a) Sustituimos  $t = 1$  en la función para obtener los beneficios del primer año:  $f(1) = 0$ . El primer año no hay beneficios.

Para calcular el beneficio al cabo de 5 años sustituimos:  $f(5) = \frac{\ln 5}{5} \approx 0.32189$ . Los beneficios ascienden a 32189 € aproximadamente.

- b) Derivamos e igualamos a 0:

$$f'(t) = \frac{1 - \ln(t)}{t^2}$$

$$f'(t) = 0 \implies 1 - \ln(t) = 0 \implies t = e$$

Al ser  $f'(t) > 0$  para  $t \in (0, e)$  y  $f'(t) < 0$  para  $t \in (e, \infty)$ , tenemos que  $f(t)$  es creciente en  $(0, e)$  y  $f(t)$  es decreciente en  $(e, \infty)$ . Por tanto hay un máximo en  $x = e$ , luego el beneficio máximo se alcanza a los 2.72 años y será de  $f(e) = \frac{1}{e} \approx 0.36788$ , es decir 36788 €

- c) Sí, es cierto, ya que la función es decreciente en  $(e, \infty)$ .

- d) Al presentar la función una asíntota horizontal en  $y = 0$ , ya que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(t)}{t} = \frac{\infty}{\infty} = 0$$

podemos decir que los beneficios se estabilizarán en 0, pero no serán negativos (la empresa no entrará en pérdidas).

### Ejercicio 49

Encuentra los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que la función  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  tenga un máximo en el punto de coordenadas  $A(0, 1)$  y alcance un mínimo relativo en  $x = -1$ .

### Solución

Para que se cumplan las condiciones del enunciado debe ocurrir que  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 0$  y  $f'(-1) = 0$ ; derivando y sustituyendo cada condición tenemos:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f(0) = 1 \implies c = 1$$

$$f'(0) = 0 \implies b = 0$$

$$f'(-1) = 0 \implies 3 - 2a + b = 0 \implies a = \frac{3}{2}$$

Con esto tenemos que la función buscada es  $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$

### Ejercicio 50

Los beneficios anuales, en miles de euros, de una empresa que se creó en el año 2000 en función del tiempo en años desde su creación viene dada por:

$$f(t) = \begin{cases} t + 5 & \text{si } 0 \leq t < 3 \\ t^2 - 10t + 29 & \text{si } 3 \leq t \leq 10 \\ \frac{\log(t)}{t} + \frac{144}{5} & \text{si } t > 10 \end{cases}$$

- a) ¿Qué beneficio obtuvo la empresa en el año 2001? ¿Y en 2010?
- b) ¿Es continua la función?
- c) ¿Cuándo crecen y cuándo decrecen los beneficios? ¿Cuándo se alcanza el beneficio máximo?
- d) Con el paso del tiempo, ¿los ingresos se estabilizan o decrecen indefinidamente?

### Solución

- a) Sustituimos en  $t = 1 \implies f(1) = 1 + 5 = 6$ , por tanto, en 2001 la empresa obtuvo 6000€ de beneficios.

Para calcular el beneficio de 2010 sustituimos en  $t = 10 \implies f(10) = 100 - 100 + 29 = 29$ , por tanto, en 2010 la empresa obtuvo 29000€ de beneficios.

- b) La función es continua en cada tramo donde está definida por ser funciones polinómicas o racionales y logarítmicas ue no se anulan, ni el argumento de la función logarítmica es negativo en el intervalo donde están definidas. Estudiaremos los límites laterales en  $t = 3$  y  $t = 10$  para estudiar la continuidad, ya que  $f(t)$  será continua en  $t = a$  si existen y son iguales:  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ .

Estudiamos en  $t = 3$ :

$$\begin{aligned} f(3) &= 9 - 30 + 29 = 8 \\ \lim_{t \rightarrow 3^-} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 3^-} t + 5 = 3 + 5 = 8 \\ \lim_{t \rightarrow 3^+} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 3^+} t^2 - 10t + 29 = 9 - 30 + 29 = 8 \end{aligned}$$

Como  $f(3) = \lim_{t \rightarrow 3^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 3^-} f(t) = 8$  podemos concluir que  $f(t)$  es continua en  $t = 3$ .

c) Derivamos e igualamos a 0 la función para estudiar la monotonía:

$$f'(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 3 \\ 2t - 10 & \text{si } 3 \leq t \leq 10 \\ \frac{\frac{1}{\ln 10} - \log(t)}{t^2} & \text{si } t > 10 \end{cases} \implies f'(t) = 0 \text{ si } t = 5$$

Tenemos que no hay extremos en el intervalo  $(0, 3)$ . En este intervalo los beneficios siempre crecen. En el intervalo  $(3, 10)$  la función crece desde  $t = 3$  hasta que se alcanza un máximo (función cuadrática convexa) en  $t = 5$ , y luego decrece hasta  $t = 10$ . A partir de  $t = 10$  la función es decreciente, ya que la derivada se anula en un valor inferior a 10, y  $f'(t) < 0$  si  $t > 10$ .

$$\frac{\frac{1}{\ln 10} - \log(t)}{t^2} = 0 \implies t = 10^{\frac{1}{\ln 10}} \approx 2.72 < 10$$

$$\text{Si } t > 10, \quad \log(t) > \frac{1}{\ln 10} \implies f'(t) < 0$$

d) Con el paso del tiempo, ¿los ingresos se estabilizan o decrecen indefinidamente?

Calculamos el límite:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(t)}{t} + \frac{144}{5} = \frac{\infty}{\infty} + \frac{144}{5} = 0 + \frac{144}{5} = 28.8$$

Los ingresos decrecen, pero no bajarán de los 28800 €

## Ejercicio 51

Un agricultor dispone de 15 toneladas de tomates. El precio del kilo de tomates hoy es de 0.60 €. Cada día que pasa, el precio del kilo aumenta medio céntimo de euro, pero se estropean 100 kg de tomates. ¿Cuándo tendrá que vender los tomates para obtener los mayores ingresos? ¿A cuánto venderá el kg de tomates? ¿Cuál será el Ingreso óptimo? ¿Cuál será la diferencia con respecto a vender los tomates sin esperar?

### Solución

Estamos ante un problema de optimización, donde la función a optimizar es la de los ingresos (en €) en función de los días que pasan ( $x$ ):

$$I(x) = (\text{Precio}) \cdot (\text{Cantidad}) = (0.60 + 0.005x) \cdot (15000 - 100x)$$

Realizaremos operaciones en la función, derivaremos, igualaremos a cero y buscaremos los posibles extremos relativos:

$$I(x) = (0.60 + 0.005x) \cdot (15000 - 100x) = -0.5x^2 + 15x + 9000$$

Derivamos:

$$I'(x) = -x + 15$$

Igualamos a 0:

$$I'(x) = 0 \implies x = 15$$

Al tratarse de una parábola convexa,  $x = 15$  es el máximo de la función. Por tanto tendrá que vender los tomates pasados 15 días, el precio al que venderá el kilo de tomates será de  $0.60 + 0.005 \cdot 15 = 0.675$  €.

El Ingreso óptimo, pasados los 15 días será:

$$I(15) = (0.60 + 0.005 \cdot 15) \cdot (15000 - 100 \cdot 15) = 0.675 \cdot 13500 = 9112.5 \text{ €}$$

Si el agricultor no hubiera esperado habría obtenido unos ingresos de:

$$I(0) = (0.60 + 0.005 \cdot 0) \cdot (15000 - 100 \cdot 0) = 0.60 \cdot 15000 = 9000 \text{ €}$$

Habría obtenido 112.5 € menos.

## Ejercicio 52

Una agencia que gestiona el alquiler vacacional dispone de 64 pisos en Canarias que alquila por 120 € la noche. Un asesor independiente que ha contratado la agencia ha deducido que por cada 10 € que aumenta el precio del alquiler por noche se pierden dos clientes (la agencia deja de alquilar dos noches un piso), que buscan un alojamiento más económico. ¿Qué precio por noche producirá el mayor beneficio a la agencia? ¿Cuál sería ese beneficio? ¿Cuál sería la diferencia en los beneficios si no aumenta el precio del alquiler?

### Solución

Estamos ante un problema de optimización, donde la función a optimizar es la de los ingresos (en €) en función del número de aumentos de 10 € en el precio de alquiler de cada apartamento ( $x$ ):

$$I(x) = (\text{Precio Alquiler}) \cdot (\text{Apartamentos Alquilados}) = (120 + 10x) \cdot (64 - 2x)$$

Realizaremos operaciones en la función, derivaremos, igualaremos a cero y buscaremos los posibles extremos relativos:

$$I(x) = (120 + 10x) \cdot (64 - 2x) = -20x^2 + 400x + 7680$$

Derivamos:

$$I'(x) = -40x + 400$$

Igualamos a 0:

$$I'(x) = 0 \implies x = 10$$

Al tratarse de una parábola convexa,  $x = 10$  es el máximo de la función. Por tanto tendrá que realizar 10 subidas de precio de 10 € para maximizar los ingresos, el precio al que tendrá que alquilar los apartamentos será de:

$$120 + 10 \cdot 10 = 220 \text{ €}$$

El Ingreso óptimo, con esa subida será:

$$I(10) = (120 + 10 \cdot 10) \cdot (64 - 2 \cdot 10) = 220 \cdot 44 = 9680 \text{ €}$$

Si la agencia no hubiera realizado ninguna subida habría obtenido unos ingresos de:

$$I(0) = (120 + 10 \cdot 0) \cdot (64 - 2 \cdot 0) = 120 \cdot 64 = 7680 \text{ €}$$

Habría obtenido 2000 € menos mensuales.

### Ejercicio 53

Encuentra los valores de  $a$  y  $b$  para que la función  $f(x) = a \cdot e^x + b \cdot \ln x$  tenga un extremo relativo en el punto de coordenadas  $(1, e)$ . Indica qué tipo de extremo es.

#### Solución

Para que se cumplan las condiciones del enunciado debe ocurrir que  $f(1) = e$  y  $f'(1) = 0$ ; derivando y sustituyendo cada condición tenemos:

$$f'(x) = a \cdot e^x + \frac{b}{x}$$

$$f(1) = e \implies a \cdot e + 0 = e \implies a = 1$$

$$f'(1) = 0 \implies a \cdot e + \frac{b}{1} = 0 \implies b = -e$$

Con esto tenemos que la función buscada es  $f(x) = e^x - e \cdot \ln x$

Estudiamos con la segunda derivada si el extremo de coordenadas  $(1, e)$  es un máximo o mínimo relativo:

$$f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2}$$

Sustituimos  $x = 1$  y estudiamos el signo:

$$f''(1) = e + e > 0$$

En  $(1, e)$  hay un mínimo relativo.

## Ejercicio 54

Calcula las integrales siguientes:

a)  $\int \frac{x^2 + 7}{x^2 + 1} dx$

b)  $\int \frac{3x + 2}{x^2 + 8} dx$

c)  $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$

d)  $\int e^{\sin x} dx$

### Solución

Vamos a resolver las integrales de los apartados a), b) y c) haciendo transformaciones para convertirlas en inmediatas o casi inmediatas.

a) Comenzamos sumando y restando 6 al numerador para descomponer la integral en dos sumandos:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 7}{x^2 + 1} dx &= \int \frac{x^2 + (7 - 6) + 6}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x^2 + 1 + 6}{x^2 + 1} dx \\ &= \int \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} dx + \int \frac{6}{x^2 + 1} dx \\ &= \int dx + \int \frac{6}{x^2 + 1} dx \\ &= x + 6 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C \end{aligned}$$

b) En este caso, descomponemos la integral en dos sumandos que llamaremos  $I_1$  e  $I_2$

$$\int \frac{3x + 2}{x^2 + 8} dx = \int \frac{3x}{x^2 + 8} dx + \int \frac{2}{x^2 + 8} dx = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int \frac{3x}{x^2 + 8} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{3}{2} \ln |x^2 + 1| + C$$

Hemos extraído la constante y transformado la integral en una inmediata multiplicando y dividiendo por 2, para considerar

$$\int \frac{f'x}{fx} dx = \ln |fx| + C$$

Para resolver  $I_2$  vamos a extraer factor común en el denominador de la integral, para convertirla en una inmediata del tipo:

$$\int \frac{f'x}{(fx)^2 + 1} dx = \arctan(fx) + C$$

$$I_2 = \int \frac{2}{x^2 + 8} dx = \int \frac{2}{8\left(\frac{x^2}{8} + 1\right)} dx = \frac{2}{8} \int \frac{1}{\left(\left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right)^2 + 1\right)} dx$$

Multiplicamos y dividimos la integral por la derivada de la función  $fx = \frac{x}{\sqrt{8}}$  y simplificamos

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{2\sqrt{8}}{8} \int \frac{1/\sqrt{8}}{\left(\left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right)^2 + 1\right)} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1/\sqrt{8}}{\left(\left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right)^2 + 1\right)} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{4}\right) + C \end{aligned}$$

Por tanto, la integral pedida es la suma de  $I_1$  e  $I_2$

$$\int \frac{3x+2}{x^2+8} dx = \frac{3}{2} \ln |x^2+8| + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{4}\right) + C$$

- c) Para integrar el producto de estas funciones vamos a sustituir en la función elevada a exponente impar, utilizando la identidad fundamental de la trigonometría

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

hasta transformarla en una integral inmediata del tipo:

$$\int f^n x f' x dx = \frac{f^{n+1} x}{n+1} + C$$

$$\begin{aligned}
 \int \sin^2 x \cos^3 x \, dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x \, dx \\
 &= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx \\
 &= \int (\sin^2 x \cos x - \sin^4 x \cos x) \, dx \\
 &= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C
 \end{aligned}$$

- d) En este caso debemos aplicar el método de integración por partes. Al reiterar el proceso veremos como se repite la integral inicial, por lo que este tipo de integral se denomina cíclica. Vamos a llamar  $I_1$  a la integral pedida.

$$I_1 = \int e^x \sin x \, dx$$

Aplicamos el método de integración por partes:

$$\begin{aligned}
 u = e^x &\implies du = e^x dx \\
 dv = \sin x &\implies v = -\cos x
 \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
 I_1 = \int e^x \sin x \, dx &= e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x) \, dx \\
 &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx \\
 &= -e^x \cos x + I_2
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Aplicamos nuevamente el método de integración por partes a la integral obtenida

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int e^x \cos x \, dx \\
 u = e^x &\implies du = e^x dx \\
 dv = \cos x &\implies v = \sin x
 \end{aligned}$$

$$I_2 = \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - I_1$$

Ahora obtenemos nuevamente la integral de partida  $I_1$ , sustituimos  $I_2$  en (3.1) y despejamos  $I_1$ :

$$I_1 = -e^x \cos x + I_2 = -e^x \cos x + I_2 = -e^x \cos x + e^x \sin x - I_1$$

Es decir:

$$I_1 = -e^x \cos x + e^x \sin x - I_1$$

Por tanto, despejando  $I_1$  tenemos la integral inicial resuelta:

$$\begin{aligned} I_1 &= -e^x \cos x + e^x \sin x - I_1 \\ 2I_1 &= -e^x \cos x + e^x \sin x \\ I_1 &= \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} \end{aligned}$$

$$\int (e^x \sin x) dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$$

## Ejercicio 55

Para regar un invernadero son necesarios 495 litros de agua anuales por cada metro cuadrado de superficie. Disponemos de un invernadero limitado por las funciones

$$\begin{aligned} g(x) &= (x+2)^2 - (4+2x) \\ h(x) &= 4 - x^2 \end{aligned}$$

Representa el invernadero. Teniendo en cuenta que las medidas están en hectáreas y que una hora de agua (36 metros cúbicos) en Canarias cuesta 24 €, ¿cuanto costará regar el invernadero al año?

### Solución

Representamos las parábolas calculando sus vértices, puntos de corte con los ejes y dando algunos valores (como los puntos donde se cortan las dos funciones), ver figura 3.4.

Calculamos el área comprendida entre las dos funciones. Definimos la función diferencia de las dos:

$$f(x) = g(x) - h(x) = (x+2)^2 - (4+2x) - (4 - x^2) = 2x^2 + 2x - 4$$

Iguamos a 0:

$$f(x) = 0 \implies x_1 = -2, x_2 = 1$$

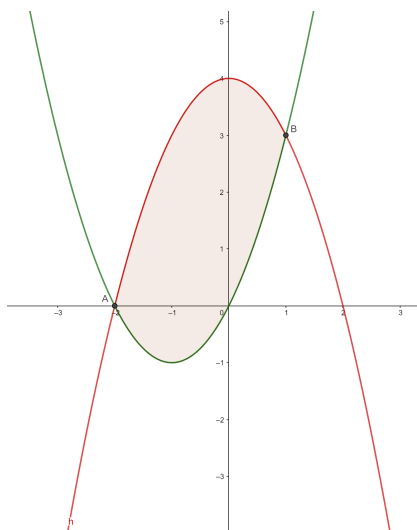


Figura 3.4: Invernadero encerrado por  $g(x)$  y  $h(x)$ .

Calculamos una primitiva de  $f(x)$

$$F(x) = \int (2x^2 + 2x - 4) dx = \frac{2x^3}{3} + x^2 - 4x$$

Sustituimos los valores en la primitiva

$$F(-2) = \frac{20}{3}, \quad F(1) = 0$$

y calculamos el área utilizando la integral definida:

$$\text{Área} = \left| \int_{-2}^1 f(x) dx \right|_{\text{Barrow}} = |F(1) - F(-2)| = \frac{20}{3} \text{ hectáreas}$$

Para calcular el coste del agua anual, multiplicamos los litros de agua que necesitamos por los metros cuadrados de invernadero que tenemos y dividiremos esa cantidad entre los  $36 m^3$  para saber cuántas horas de agua necesitaremos.

$$\frac{20}{3} \cdot 10.000 \cdot 495 = 33.000.000 l = 33.000 m^3 \implies 33.000/36 = \frac{2750}{3} \text{ horas.}$$

Finalmente multiplicaremos por 24€ el número de horas de agua que necesitamos y obtendremos el coste del agua de todo el año:

$$\frac{2750}{3} \cdot 24 = 22.000 \text{ €}$$

El coste del agua para regar el invernadero al año asciende a 22000 €

## Ejercicio 56

En una piscifactoría se inicia la cría de cierta especie, sabiendo que el número de individuos viene dado por la función

$$F(t) = \frac{10000t + 200}{2t + 1}$$

donde la variable  $t$  mide el tiempo en años.

- ¿Con cuántos ejemplares se inició la cría?
- Los responsables de la piscifactoría confían en alcanzar los 2000 ejemplares antes de que pasen 4 meses desde el inicio de la cría. ¿Será posible?
- El veterinario jefe ha asegurado a la dirección de la empresa que lograrán obtener 10 000 ejemplares, pero que es un objetivo a largo plazo. ¿Es cierta esta afirmación? Justifica la respuesta.

### Solución

- ¿Con cuántos ejemplares se inició la cría?

$$F(0) = 200 \text{ ejemplares}$$

- Los responsables de la piscifactoría confían en alcanzar los 2000 ejemplares antes de que pasen 4 meses desde el inicio de la cría. ¿Será posible?

$$F(t) = 2000 \implies t = \frac{1}{3} \text{ de año. Por tanto, sí, es posible.}$$

- El veterinario jefe ha asegurado a la dirección de la empresa que lograrán obtener 10000 ejemplares, pero que es un objetivo a largo plazo. ¿Es cierta esta afirmación? Justifica la respuesta.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10000t + 200}{2t + 1} = 5000$$

La afirmación es falsa, la población de animales se estabilizará alrededor de los 5000 ejemplares.

## Ejercicio 57

El equipo del CSI matemático se encuentra investigando un crimen y deben situar la hora de la muerte para descartar sospechosos. El cadáver se ha encontrado en su apartamento a las 8 de la mañana y con la calefacción puesta a  $22^{\circ}\text{C}$ . En ese momento, el cuerpo presentaba una temperatura de  $30^{\circ}\text{C}$  y una

hora después era de  $28^{\circ}\text{C}$ . Si sabemos que el enfriamiento del cuerpo sigue la función  $f(t) = T + Ae^{-kt}$ , con  $t$  el tiempo transcurrido medido en horas y  $T$  la temperatura ambiente.

- Calcula las constantes  $A$  y  $k$  en este caso.
- ¿A qué hora aproximada se produjo el asesinato? (La temperatura corporal humana es de  $37^{\circ}\text{C}$  de media).
- En el escenario del crimen se encuentra un objeto mecánico que pierde calor siguiendo la misma función y que también presentaba una temperatura de  $30^{\circ}\text{C}$  cuándo se encontró el cuerpo. Suponiendo que el equipo forense no pueda intervenir durante un número indeterminado de horas, ¿a qué temperatura estaría ese objeto después de ese tiempo, si no se ha desconectado la calefacción de la habitación?

### Solución

- Calcula las constantes  $A$  y  $k$  en este caso.

$T = 22^{\circ}\text{C}$ , considerando  $t = 0$  la hora a la que se encontró el cuerpo y se tomó la primera temperatura de  $30^{\circ}\text{C}$ :

$$f(0) = 22 + C = 30 \implies A = 8$$

Una hora después, el cuerpo tenía una temperatura de  $28^{\circ}\text{C}$ , por lo que

$$f(1) = 22 + 8e^{-k} = 28$$

$$8e^{-k} = 6 \implies \ln(e^{-k}) = \ln\left(\frac{6}{8}\right) \implies k = -\ln\left(\frac{3}{4}\right) \approx 0.29$$

- ¿A qué hora aproximada se produjo el asesinato? (La temperatura corporal humana es de  $37^{\circ}\text{C}$  de media).

Sustituimos las constantes anteriores y tenemos en cuenta la temperatura media corporal para calcular  $t$ :

$$f(t) = 22 + 8e^{\ln\left(\frac{3}{4}\right)t}$$

Despejamos el tiempo en la expresión:

$$22 + 8e^{\ln\left(\frac{3}{4}\right)t} = 37 \implies t = \frac{\ln 15/8}{\ln 3/4} \approx -2.19$$

Es decir, la hora probable de la muerte es 2.19 horas antes de las 8 de la mañana, hora en la que se tomó el primer dato de temperatura del cuerpo. Así, podemos estimar que el asesinato se produjo a las 5.81h o a las 5 horas y 49 minutos, aproximadamente.

- c) En el escenario del crimen se encuentra un objeto mecánico que pierde calor siguiendo la misma función y que también presentaba una temperatura de  $30^{\circ}\text{C}$  cuándo se encontró el cuerpo. Suponiendo que el equipo forense no pueda intervenir durante un número indeterminado de horas, ¿a qué temperatura estaría ese objeto después de ese tiempo, si no se ha desconectado la calefacción de la habitación?

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (22 + 8e^{\ln(\frac{3}{4})t}) = 22$$

### Ejercicio 58

Una arquitecta diseña la "Plaza de las Matemáticas" con tres fuentes a las que debe colocar una cenefa alrededor por petición del ayuntamiento de la ciudad. Las fuentes tienen forma circular, cuadrada y de triángulo equilátero. Además, el perímetro de la fuente cuadrada es el mismo que el de la fuente triangular. Si cuenta con  $100\text{ m}$  de cenefa, indica las dimensiones de las fuentes para ocupar la menor superficie posible de la plaza.

#### Solución

Llamamos  $r$  al radio de la fuente circular y  $x$  al valor del lado de la triangular, además, la fuente cuadrada tiene que tener igual perímetro que la triangular, por lo que el lado del cuadrado es  $\frac{3x}{4}$  y obtenemos que la suma de los perímetros es  $6x + 2\pi r = 100$ .

Debemos optimizar la función: suma de las áreas del cuadrado, el triángulo y el círculo

$$S(x, r) = \left(\frac{3x}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)x^2 + \pi \cdot r^2$$

Despejando  $r$  de la ecuación  $6x + 2\pi r = 100$  y sustituyendo en la función  $S(x, r)$  llegamos a

$$S(x) = \left(\frac{3x}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)x^2 + \pi \left(\frac{50 - 3x}{\pi}\right)^2$$

Buscamos sus puntos críticos

$$S'(x) = \left(\frac{9}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)x - \left(\frac{6}{\pi}\right) \cdot (50 - 3x) = 0$$

$$\left(\frac{9}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)x - \left(\frac{6}{\pi}\right) \cdot (50 - 3x) = 0 \implies x = \frac{2400}{144 + 9\pi + 4\sqrt{3}\pi} \approx 12.37\text{ m}$$

Comprobamos en

$$S''(x) = \frac{9}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{18}{\pi} \implies S''(12.37) > 0$$

y por tanto, en  $x \approx 12.37 \text{ m}$  hay un mínimo

Como  $r = \frac{50 - 3x}{\pi}$  el radio de la fuente circular será  $r \approx 4.1 \text{ m}$

Las dimensiones óptimas son:  $12.37 \text{ m}$  de lado la fuente triangular, el lado de la cuadrada es  $\frac{3x}{4} \approx 9,28 \text{ m}$  y  $4.1 \text{ m}$  de radio la fuente circular.

### Ejercicio 59

Dentro de una cúpula que viene definida por la función  $f(x) = 6 - \frac{1}{6}x^2$  vamos a construir un mural rectangular con las dimensiones máximas. ¿Cuáles son estas dimensiones?

#### Solución

Sea la función  $f(x) = 6 - \frac{1}{6}x^2$ . Vamos a dibujar la situación pedida que nos aportará más claridad.

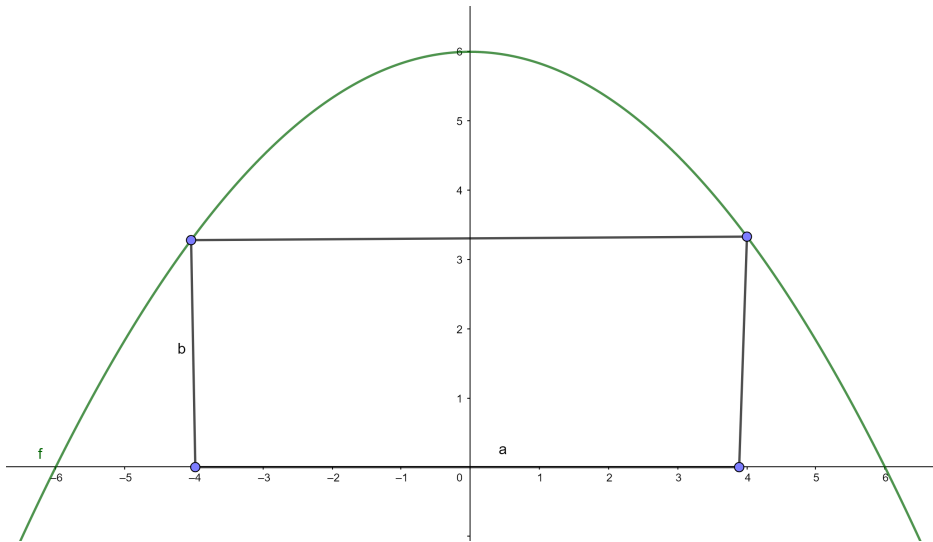


Figura 3.5:  $f(x) = 6 - \frac{1}{6}x^2$ .

El área buscada es  $S = a \cdot b$ , donde  $a$  es la base del mural y  $b$  la altura. Además tenemos como condición que el punto  $(a/2, b)$  pertenece a la parábola, es decir,

$$b = 6 - \frac{1}{6}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 6 - \frac{1}{6} \frac{a^2}{4} = 6 - \frac{a^2}{24} = \frac{144 - a^2}{24}$$

Ahora sustituimos la condición en la expresión que vamos a maximizar y a continuación derivamos para obtener esos posibles puntos

$$S(a) = \frac{a(144 - a^2)}{24} = \frac{144a - a^3}{24}$$

Derivando nos queda:

$$S'(a) = \frac{144 - 3a^2}{24}$$

Igualando la derivada a cero se obtiene que

$$-3a^2 = 0 \rightarrow a^2 = 144 \rightarrow a = 4\sqrt{3}$$

Sustituyendo en la condición

$$b = \frac{144 - (4\sqrt{3})^2}{24} = 4$$

Nos faltaría comprobar que dicho valor de  $a$  efectivamente es un máximo. Para ello calculamos la derivada segunda de la función  $S(a)$  a partir de la  $S'(a)$ .

$$S'(a) = 6 - \frac{a^2}{8} \rightarrow S''(a) = -\frac{a}{4}$$

Sustituyendo en  $S''(4\sqrt{3}) < 0$  y por tanto es un máximo.

## Ejercicio 60

Determinar cuál es el mayor valor que puede tomar la diferencia entre la raíz cuadrada y el cuadrado de un número positivo. Justifica si dicha diferencia toma o no un valor mínimo.

### Solución

Sea la función buscada  $f(x) = \sqrt{x} - x^2$  con  $x \geq 0$ .

Estudiamos el crecimiento de  $f(x)$ .

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2x$$

Si la derivada se anula, resolviendo la ecuación nos queda que

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x \implies 1 = 4x\sqrt{x}$$

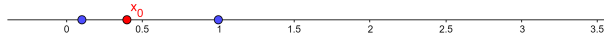


Figura 3.6: Representantes para estudiar el crecimiento.

Elevando al cuadrado tenemos que  $1 = 16x^2x = 16x^3$ , de donde obtenemos  $x_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{16}} \approx 0.4$  que será la coordenada del posible extremo relativo.

Eligiendo un representante de cada intervalo, y según el signo que obtengamos en  $f'(x)$ , deducimos el crecimiento de  $f(x)$ .

Podemos comprobar que  $f'(0, 1) > 0$ , con lo que la función es creciente en el intervalo  $[0, x_0)$ . Además,  $f'(1) < 0$ , y por tanto,  $f(x)$  decrece en  $(x_0, \infty)$ . Con estos datos, podemos concluir que  $f(x)$  tiene un máximo relativo en  $x_0$ , y que el máximo de la función coincide con su máximo relativo en  $x_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$  y vale  $\sqrt[3]{1/256} \approx 0,47247$ .

Otra forma de saber que en  $x_0$  hay un máximo relativo, sería utilizando la segunda derivada. Sabemos que:

- Si  $f'(a) = 0$  y  $f''(a) > 0$ , en  $x = a$  hay un mínimo relativo.
- Si  $f'(a) = 0$  y  $f''(a) < 0$ , en  $x = a$  hay un máximo relativo.

Calculamos la derivada segunda, para ello ponemos en forma de potencia la expresión anterior

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2x \Rightarrow f''(x) = \frac{-1}{4}x^{-\frac{1}{2}-1} - 2 = \frac{-1}{4}x^{-\frac{3}{2}} - 2 = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}} - 2$$

Como el posible extremo es  $x_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$  al sustituirlo en la derivada segunda nos queda

$$f''\left(\sqrt[3]{\frac{1}{16}}\right) = \frac{1}{4\sqrt[3]{\frac{1}{16}}} - 2 = -1 - 3 = -4 < 0$$

luego  $x_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$  es un máximo relativo, y vale  $\sqrt[3]{1/256} \approx 0.47247$ .

Veamos ahora si tiene un mínimo. Como la función decrece en  $(x_0, \infty)$  calculamos su límite cuando  $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} - x^2 = -\infty$$

y, por tanto, la función no tiene un valor mínimo.

La siguiente gráfica ilustra la función  $f(x)$ .

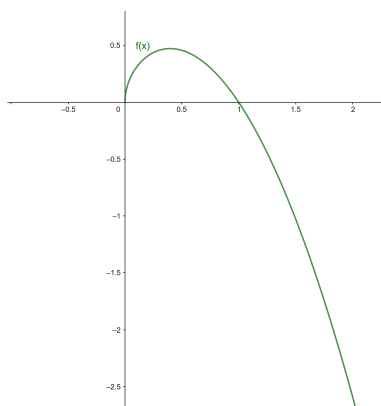


Figura 3.7:  $f(x) = \sqrt{x^2 - x^2}$ .

### Ejercicio 61

Dada la función  $f(x) = \ln x$  con  $x \in [0, 2]$ .

- a) Encontrar un polinomio  $p(x)$  de grado dos, tal que

$$f(1) = p(1)$$

$$f'(1) = p'(1)$$

$$f''(1) = p''(1)$$

- b) Calcula razonadamente  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - p(x)}{(x - 1)^2}$

### Solución

- a) Tenemos que encontrar un polinomio de grado dos,  $p(x) = ax^2 + bx + c$  que verifique:

$$f(1) = p(1)$$

$$f'(1) = p'(1)$$

$$f''(1) = p''(1)$$

donde  $f(x) = \ln nx$  con  $x \in [0, 2]$ .

De  $f(1) = p(1)$ , obtenemos que  $\ln(1) = a + b + c \rightarrow a + b + c = 0$ .

Como  $f'(x) = \frac{1}{x}$  y  $p'(x) = 2ax + b$ , de  $f'(1) = p'(1)$ , tenemos que  $1 = 2a + b$ .

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$  y  $p''(x) = 2a$ , de  $f''(1) = p''(1)$ , tenemos que  $-1 = 2a$

Obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a + b = 1 \\ 2a = -1 \end{cases}$$

cuya solución es  $a = -1/2, b = 2, c = -3/2$ .

Por lo tanto el polinomio pedido es  $p(x) = \frac{-x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2}$

b) Calcula razonadamente  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - p(x)}{(x - 1)^2}$

Vamos a calcular  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - p(x)}{(x - 1)^2}$  para ello sustituyendo nos queda

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - \left( \frac{-x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2} \right)}{(x - 1)^2}$$

y en el punto  $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - p(x)}{(x - 1)^2} = \frac{0}{0}$$

y como las dos funciones son continuas y derivables, se puede aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - \left( \frac{-x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2} \right)}{(x - 1)^2} &= \frac{0}{0} \\ &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - \left( \frac{-2x}{2} + 2 \right)}{2(x - 1)} = \frac{0}{0} \\ &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{-1}{x^2} - (-1)}{2x} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

## Ejercicio 62

Si la derivada de una función viene dada por la expresión  $f'(x) = (x - 1)^3(x - 5)$

- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Los valores en los cuales la  $f(x)$  tiene máximos relativos, mínimos relativos o puntos de inflexión
- La función  $f(x)$  si  $f(0) = 0$

**Solución**

- a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

En los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función se cumple:

$$\text{Si } f'(x) = (x-1)^3(x-5) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ es creciente}$$

$$\text{Si } f'(x) = (x-1)^3(x-5) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente}$$

Por tanto buscamos las posibles soluciones de la ecuación  $(x-1)^3(x-5) = 0$  obteniendo  $x_1 = 1$  y  $x_2 = 5$ .

El signo de la derivada de la función se mantiene constante en cada uno de los siguientes intervalos:

$$(-\infty, 1) \quad (1, 5) \quad (5, \infty)$$

Por tanto, podemos elegir un representante de cada uno de ellos para averiguar el signo de  $f'(x)$ , por ejemplo:

$$f'(0) > 0, \quad f'(4) < 0, \quad f'(6) > 0$$

La función  $f(x)$  crece  $(-\infty, 1) \cup (5, \infty)$  y decrece  $(1, 5)$ .

- b) Los valores en los cuales la  $f(x)$  tiene máximos relativos, mínimos relativos o puntos de inflexión.

Los posibles puntos notables estarán en las raíces de la derivada primera, esto es,  $x_1 = 1$  y  $x_2 = 5$ . Hallamos la derivada segunda:

$$f''(x) = 3(x-1)^2(x-5) + (x-1)^3$$

y sustituimos los valores anteriores. Se obtiene  $f''(1) = 0$  y  $f''(5) > 0$ , por tanto  $x = 5$  es un mínimo y  $x = 1$  puede ser un punto de inflexión. Además, si resolvemos la ecuación  $f''(x) = 0$ , se obtiene que  $x = 4$  puede ser otro posible punto de inflexión.

Hallamos la derivada tercera y comprobamos:

$$\begin{aligned} f'''(x) &= 6(x-1)(x-5) + 3(x-1)^2 + 3(x-1)^2 \\ &= 6(x-1)(x-5) + 6(x-1)^2 \\ &= 12x^2 - 48x + 36 \end{aligned}$$

$f'''(1) = 0$  y  $f'''(4) \neq 0$ , es decir, en  $x = 4$  hay un punto de inflexión y en  $x = 1$  no sabemos. Para averiguarlo, tendríamos que obtener el orden de la primera derivada que no se anule en  $x = 1$ , si fuese par, sería un

máximo o mínimo relativo, y si fuese impar, sería un punto de inflexión. Calculemos  $f^{iv}(x) = 24x - 48$  y  $f^{iv}(1) < 0$ , por lo que en  $x = 1$  hay un máximo relativo.

Sus segundas coordenadas las hallaremos en el siguiente apartado.

c) La función  $f(x)$  si  $f(0) = 0$ .

Para hallar la  $f(x)$  a partir de la  $f'(x)$  debemos integrar  $f'(x)$

$$\begin{aligned}\int ((x-1)^3(x-5))dx &= \int (x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 16x + 5)dx \\ &= \frac{x^5}{5} - 2x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 5x + c\end{aligned}$$

como  $f(0) = 0$  se obtiene que  $c = 0$ . Por lo tanto la función buscada es

$$f(x) = \frac{x^5}{5} - 2x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 5x$$

Ahora calculamos las ordenadas de los dos puntos notables, es decir, el mínimo relativo estará en  $P(5, -50)$ , el máximo relativo en  $Q(1, 11/5)$  y el punto de inflexión en  $R(4, -156/5)$ .

### Ejercicio 63

Una diana viene determinada por la función  $x^2 + y^2 = 9$ . Hallar el área de acierto utilizando el cálculo integral.

#### Solución

Para hallar esta área debo despejar la variable dependiente de la función dada:  $x^2 + y^2 = 9$ , es decir,  $y = \sqrt{9 - x^2}$ .

Utilizando la simetría de la función (ver figura 3.8), el área será

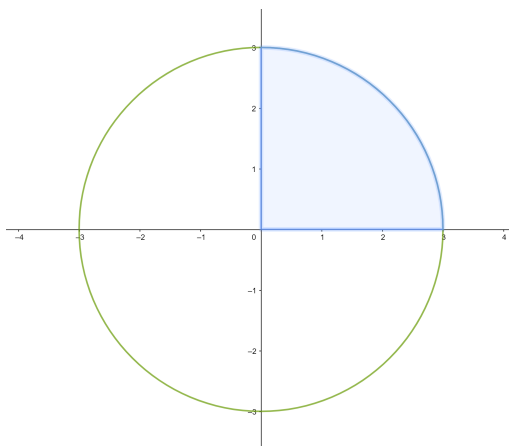
$$A = 4 \int_0^3 \sqrt{9 - x^2} dx$$

Calculamos dicha integral mediante un cambio de variable, operando previamente

$$\int \sqrt{9 - x^2} dx = 3 \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2} dx$$

El cambio

$$\frac{x}{3} = \sin t \rightarrow x = 3 \sin t \rightarrow dx = 3 \cos t dt$$



**Figura 3.8:**  $x^2 + y^2 = 9$ , circunferencia centrada en  $(0, 0)$  y de radio 3.

Por tanto ahora se tiene,

$$\begin{aligned} 3 \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2} dx &= 3 \int \sqrt{1 - (\sin^2(t))} 3 \cos t dt \\ &= 9 \int \cos^2 t dt \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Particularmente, si  $b = a$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \cos(2a) &= \cos a \cos a - \sin a \sin a \\ &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) \\ &= 2 \cos^2 a - 1 \end{aligned}$$

y llegamos a

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

Utilizando esta relación

$$\begin{aligned} 9 \int \cos^2 t dt &= 9 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{9}{2} \int 1 + \cos 2t dt = \frac{9}{2} \left( \int dt + \int \cos 2t dt \right) \\ &= \frac{9}{2} \left( t + \frac{1}{2} \int 2 \cos 2t dt \right) = \frac{9}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \end{aligned}$$

Deshaciendo el cambio  $t = \arcsen\left(\frac{x}{3}\right)$  nos quedaría

$$\frac{9}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sen 2t \right) = \frac{9}{2} \left( \arcsen \frac{x}{3} \right) + \frac{9}{4} \sen \left( 2 \arcsen \frac{x}{3} \right)$$

Por tanto, el área buscada aplicando la regla de Barrow al resultado anterior queda

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx \\ &= 4 \left[ \frac{9}{2} \left( \arcsen \frac{x}{3} \right) + \frac{9}{4} \sen \left( 2 \arcsen \frac{x}{3} \right) \right]_0^3 \\ &= 4 \left( \frac{9}{2} (\arcsen 1 - \arcsen 0) + \frac{9}{4} \sen (2 \arcsen 1 - \arcsen 0) \right) \\ &= 4 \left( \frac{9}{2} \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) + \frac{9}{4} \sen \left( 2 \frac{\pi}{2} - 0 \right) \right) \\ &= 4 \frac{9\pi}{4} \\ &= 9\pi \end{aligned}$$

El resultado se podría haber obtenido mediante la fórmula del área de un círculo  $A = \pi r^2$ . La diana,  $x^2 + y^2 = 9$ , es una circunferencia centrada en  $(0, 0)$  y de radio 3, así que su área será  $A = \pi 3^2 = 9\pi$ .

### Ejercicio 64

Sea  $h(x)$  una función derivable en todos sus puntos, de la que se conocen los siguientes datos  $h(2) = 3$  y  $h'(2) = 1$ . Se considera la función

$$f(x) = \sqrt{[h(x)]^2 + x^2 + 3}$$

Hallar la recta tangente y normal a dicha función en el punto  $x = 2$ .

#### Solución

Hallamos el punto de tangencia en  $x = 2$

$$f(2) = \sqrt{[h(2)]^2 + 2^2 + 3} = \sqrt{9 + 4 + 3} = 4$$

por tanto el punto buscado es  $P(2, 4)$

Ahora necesitamos la pendiente  $m = f'(2)$ , es decir:

$$f'(x) = \frac{2h(x)h'(x) + 2x}{2\sqrt{[h(x)]^2 + x^2 + 3}} = \frac{h(x)h'(x) + x}{\sqrt{[h(x)]^2 + x^2 + 3}}$$

y sustituyendo queda

$$m = f'(2) = \frac{h(2)h'(2) + 2}{\sqrt{[h(2)]^2 + 2^2 + 3}} = \frac{3(-1) + 2}{\sqrt{9 + 4 + 3}} = \frac{-1}{4}$$

La ecuación de la recta tangente es

$$y - f(2) = m(x - 2) \rightarrow y - 4 = \frac{-1}{4}(x - 2) \rightarrow y = \frac{-1}{4}x + \frac{9}{2}$$

Y la normal

$$y - f(2) = \frac{-1}{m}(x - 2) \rightarrow y - 4 = 4(x - 2) \rightarrow y = 4x - 4$$

## Ejercicio 65

Una partícula se mueve a lo largo de la gráfica de la curva  $l(x) = \frac{2x}{1-x^2}$  con  $x > 1$ . En el punto de abscisa  $x = 2$  la abandona y sigue desplazándose a lo largo de la tangente a la curva. Se pide:

- Ecuación de la recta tangente.
- Si el desplazamiento es de izquierda a derecha, encuentra el punto en el que la partícula corta al eje OX.
- Si es desplazamiento es de derecha a izquierda, encuentra el punto en el que la partícula encuentra una asíntota vertical y calcula dicho punto.

### Solución

- Ecuación de la recta tangente.

Para calcular la tangente a la función  $l(x) = \frac{2x}{1-x^2}$  en  $x = 2$  aplicamos la fórmula:

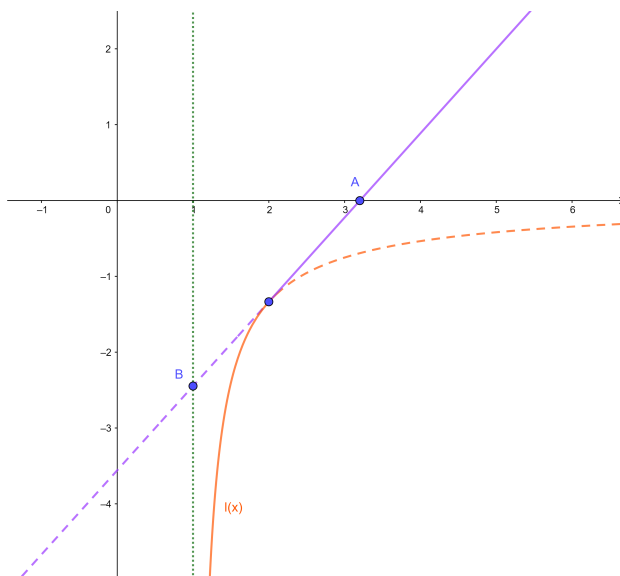
$$y - l(2) = l'(2)(y - 2)$$

Calculemos

$$\begin{aligned} l(2) &= \frac{-4}{3} \\ l'(x) &= \frac{2(1-x^2) - 2x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x^2 + 2}{(1-x^2)^2} \\ l'(2) &= \frac{10}{9} \end{aligned}$$

Por tanto la ecuación de la recta tangente será:

$$y + \frac{4}{3} = \frac{10}{9}(x - 2) \implies 10x - 9y - 32 = 0$$



**Figura 3.9:**  $l(x) = \frac{2x}{1-x^2}$  con  $x > 1$  y recta tangente.

- b) Si el desplazamiento es de izquierda a derecha, encuentra el punto en el que la partícula corta al eje OX.

La figura 3.9 muestra la gráfica de la curva  $l(x) = \frac{2x}{1-x^2}$  con  $x > 1$  y la recta tangente en el  $(2, -4/3)$ . Como podemos observar, el corte con el eje OX lo produce la recta tangente, y así, para calcular el punto de corte se resuelve el sistema formado por dicha recta y  $y = 0$

$$\begin{cases} 10x - 9y - 32 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{16}{5}$$

Obtenemos el punto  $A(16/5, 0)$ .

- c) Si es desplazamiento es de derecha a izquierda, calcule el punto en el que la partícula encuentra una asíntota vertical.

Las asíntotas de la función están en los puntos  $x = 1$  y  $x = -1$ . Para hallar el punto de corte de la tangente y la asíntota hay que resolver el sistema formado por ambas ecuaciones

$$\begin{cases} 10x - 9y - 32 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{-22}{9}$$

El punto será  $B(1, -22/9)$ .

## Ejercicio 66

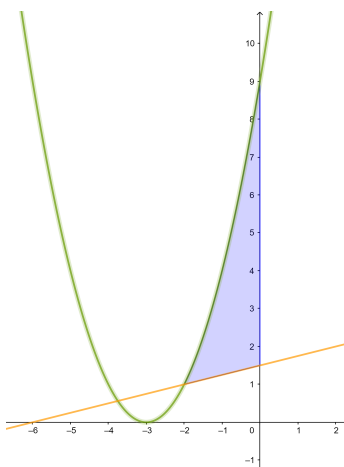
El logotipo de la empresa de windsurf "Viento fresco" se diseña siguiendo la forma que delimitan las funciones  $f(x) = (x + 3)^2$ ,  $g(x) = \frac{x + 6}{4}$  y el eje de ordenadas, enmarcada en un rectángulo de dimensiones  $3 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$ . Con estos datos indica:

- La forma del logotipo dentro del rectángulo.
- Si pintamos el fondo de color blanco y la superficie que definen las funciones de color azul, ¿en qué zona emplearemos más pintura?

### Solución

- La forma del logotipo dentro del rectángulo.

Representamos las funciones y tomamos como diseño la región sombreada.



**Figura 3.10:** Forma del logotipo  $f(x) = (x + 3)^2$ ,  $g(x) = \frac{x + 6}{4}$ .

- Si pintamos el fondo de color blanco y la superficie que definen las funciones de color azul, ¿en qué zona emplearemos más pintura?

El logotipo se enmarca en un rectángulo de  $24 \text{ cm}^2$  así que calculamos el área A que ocupa el logo.

Para ello necesitamos calcular los límites de integración. El límite inferior es la coordenada de la intersección de  $f(x)$  y  $g(x)$

$$(x + 3)^2 = \frac{x + 6}{4} \implies x = -2$$

y el límite superior es la coordenada del corte de  $g(x)$  con el eje OY (recta con ecuación  $x = 0$ ). El área sería

$$A = \int_{-2}^0 \left( (x+3)^2 - \frac{x+6}{4} \right) dx = \left[ \frac{(x+3)^3}{3} - \frac{x^2}{8} - \frac{3x}{2} \right]_{-2}^0 = \frac{37}{6} u^2.$$

La zona azul del logo es de  $\frac{37}{6} cm^2 \approx 6.16 cm^2$ , por lo que se emplea más pintura en el fondo blanco del diseño.

## Ejercicio 67

Una empresa fabrica ventanas para yates de lujo, con la forma de la figura que definen las gráficas de las funciones  $f(x) = |x|$  y  $g(x) = 2 - x^2$ .

Si cada ventana tiene un precio de costo de 392€ y se comercializa a un precio de 420€/m<sup>2</sup>, indica el precio de costo del m<sup>2</sup> de ventana y el porcentaje de beneficio de la empresa fabricante.

La representación se ha hecho con las unidades en metros.

## Solución

Representamos las dos funciones, la ventana debe tener la forma de la parte sombreada.

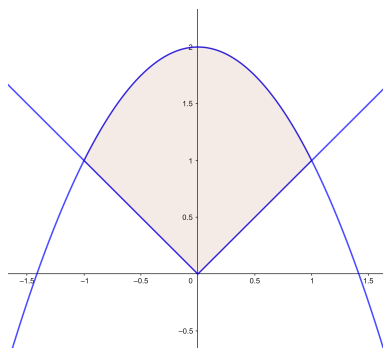


Figura 3.11: Área encerrada por  $f(x) = |x|$  y  $g(x) = 2 - x^2$ .

El área de la ventana es el doble del área entre 0 y 1, es decir:

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \int_0^1 (2 - x^2 - x) dx \\
 &= 2 \left[ 2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\
 &= 2 \cdot \frac{7}{6} \\
 &= \frac{7}{3} u^2 \approx 2.33 u^2
 \end{aligned}$$

Así, cada ventana mide  $\frac{7}{3} m^2 \approx 2.33 m^2$

Por tanto, el  $m^2$  de ventana tiene un coste de 168€.

Se comercializa a 420€ el  $m^2$ , obteniendo la empresa un beneficio del 60 %.

### Ejercicio 68

Queremos diseñar pegatinas infantiles con la forma que definen las gráficas de  $y = \sin x$  e  $y = \cos x$  entre  $x = \frac{\pi}{4}$  y  $x = \frac{3\pi}{4}$ , después vamos a imprimir el diseño en  $1 m^2$  de plancha adhesiva.

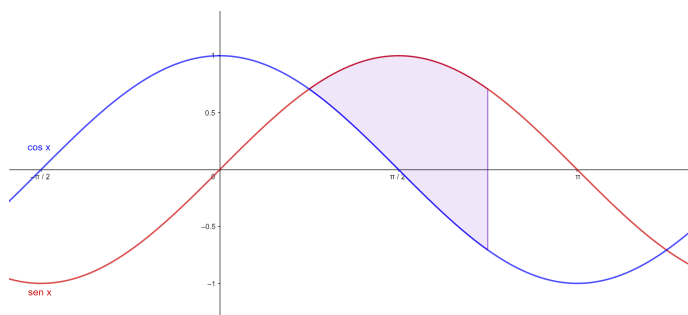
- Representa la región del diseño.
- Calcula el área que definen.
- Si hacemos la representación con las unidades en  $dm$ , ¿podremos imprimir 100 pegatinas con el material que tenemos?

### Solución

- Representa la región del diseño.  
Representamos las funciones y delimitamos la región del diseño:
- Calcula el área que definen.

$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx = \sqrt{2} u^2.$$

- Si hacemos la representación con las unidades en  $dm$ , ¿podremos imprimir 100 pegatinas con el material que tenemos?



**Figura 3.12:** Forma de pegatinas entre  $y = \sin x$  e  $y = \cos x$ .

$$\sqrt{2} \, dm^2 \approx 1.41 \, dm^2$$

Para imprimir 100 pegatinas necesitamos más de  $1 \, m^2$  de plancha adhesiva.

## CAPÍTULO 4

# **Geometría**

*Josefa Caballero Mena*



**Ejercicio 69**

Dados los puntos  $P(2, 2, 3)$ ,  $Q(1, 0, 5)$  y  $R(-2, 3, 4)$  y los vectores  $\vec{v} = (1, -1, 3)$ ,  $\vec{w} = (0, -2, 1)$  de  $\mathbb{R}^3$ . Calcula indicando si el resultado es un punto o vector.

- a)  $\overrightarrow{QP}$
- b)  $3\vec{v} - 2\vec{w}$
- c)  $\vec{v} - \overrightarrow{RP}$
- d)  $P + \vec{v}$
- e)  $R + \overrightarrow{PQ} + \vec{w}$

**Solución**

- a)  $\overrightarrow{QP} = (2, 2, 3) - (1, 0, 5) = (1, 2, -2)$ , indica las coordenadas de un vector fijo que va del punto  $Q$  a  $P$ .
- b)  $3\vec{v} - 2\vec{w} = 3(1, -1, 3) - 2(0, -2, 1) = (3, 1, 7)$ , es una combinación lineal de vectores libres por tanto es un vector libre.
- c) Debemos calcular primero las coordenadas del vector  $\overrightarrow{RP}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RP} &= (2, 2, 3) - (-2, 3, 4) = (4, -1, -1) \\ \vec{v} - \overrightarrow{RP} &= (1, -1, 3) - (4, -1, -1) = (-3, 0, 4).\end{aligned}$$

Es una resta de dos vectores por tanto el resultado es un vector.

- d)  $R + \overrightarrow{PQ} + \vec{w} = R - \overrightarrow{QP} + \vec{w} = (-2, 3, 4) - (1, 2, -2) + (0, -2, 1) = (-3, -1, 7)$ . En este caso, el resultado muestra las coordenadas del punto que se alcanza partiendo de  $R$  y avanzando en las trayectorias marcadas por los vectores  $\overrightarrow{PQ}$  y  $\vec{w}$ .

**Ejercicio 70**

Se consideran los vectores  $\vec{u} = (-1, 2, 3)$ ,  $\vec{v} = (2, 0, -1)$  y el punto  $A(-4, 4, 7)$ . Se pide:

- a) Determinar un vector unitario  $\vec{w}_1$  que sea ortogonal a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  y con tercera coordenada negativa.
- b) Hallar un vector no nulo  $\vec{w}_2$  que sea combinación lineal de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  y ortogonal a  $\vec{v}$ .
- c) Determinar los vértices del paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  y una de sus diagonales en el segmento  $\overline{OA}$ .

**Solución**

- a) El vector  $\vec{w}_1 = (a, b, c)$  que buscamos cumple que  $\|\vec{w}_1\| = 1$ ,  $\vec{w}_1 \perp \vec{u}$ ,  $\vec{w}_1 \perp \vec{v}$  y  $c < 0$ . Para hallar un vector que sea ortogonal a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , podemos calcular el producto vectorial de ambos

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 5, -4).$$

Como este vector ya cumple que tiene la tercera coordenada negativa, lo que nos faltaría es conseguir que tenga norma 1. Para ello, dividimos las coordenadas del vector por su módulo

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2 + (-4)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

Por tanto,  $\vec{w}_1 = \left(\frac{-2}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{-4}{3\sqrt{5}}\right)$ .

- b) Buscamos  $\vec{w}_2 \neq \vec{0}$  tal que, sea combinación lineal de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  y ortogonal a  $\vec{v}$ .

Como debe ser combinación lineal de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ ,

$$\begin{aligned} \vec{w}_2 &= \alpha_1 \vec{u} + \alpha_2 \vec{v}, & \alpha_1, \alpha_2 &\in \mathbb{R} \\ &= \alpha_1(-1, 2, 3) + \alpha_2(2, 0, -1) \\ &= (-\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1, 3\alpha_1 - \alpha_2) \end{aligned}$$

y además se exige que  $\vec{w}_2 \perp \vec{v}$ , por lo que  $\vec{w}_2 \cdot \vec{v} = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \vec{w}_2 \cdot \vec{v} = 0 &\implies (-\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1, 3\alpha_1 - \alpha_2) \cdot (2, 0, -1) = 0 \\ &\implies 2(-\alpha_1 + 2\alpha_2) - 3\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ &\implies -5\alpha_1 + 5\alpha_2 = 0 \\ &\implies \alpha_1 = \alpha_2 \end{aligned}$$

Por tanto,  $\vec{w}_2 = (\alpha_1, 2\alpha_1, 2\alpha_1) = \alpha_1(1, 2, 2)$  con  $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ . De lo que se deduce que  $\vec{w}_2$  puede ser cualquier vector del subespacio vectorial generado por el vector  $\vec{w} = (1, 2, 2)$ .

- c) Se busca un paralelogramo como el que se indica en la figura 4.1.  
Se tiene que  $\vec{OB} = \lambda(-1, 2, 3)$  y  $\vec{OC} = \gamma(2, 0, -1)$  con  $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$  y  $\vec{OA} = \vec{OB} + \vec{OC}$ , entonces

$$(-4, 4, 7) = (-\lambda + 2\gamma, 2\lambda, 3\lambda - \gamma).$$

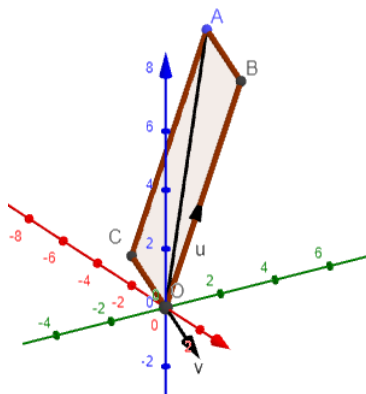


Figura 4.1: Paralelogramo.

De lo que se deduce que,

$$\begin{cases} 2\gamma - \lambda = -4 \\ 2\lambda = 4 \\ 3\lambda - \gamma = 7 \end{cases}$$

Despejando de estas ecuaciones se obtiene que  $\lambda = 2$  y  $\gamma = -1$  es una solución del sistema. Por tanto, los otros dos vértices del paralelogramos son  $B(-2, 4, 6)$  y  $C(-2, 0, 1)$ .

### Ejercicio 71

La Ley de Lorentz establece que una partícula con carga  $q$  (su unidad es  $C$  de Coulomb) que circula a una velocidad  $\vec{v}$  por un punto en el que existe una intensidad de campo magnético  $\vec{B}$  (su unidad es  $T$  de Tesla), sufrirá la acción de una fuerza magnética  $\vec{F}$  (su unidad es  $N$  de Newton) denominada fuerza de Lorentz, que se obtiene por medio de la siguiente expresión

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}).$$

Ahora, supongamos que un protón penetra con una velocidad  $\vec{v} = 2 \cdot 10^5 \vec{i} \text{ m/s}$ , en un campo magnético  $\vec{B} = 2 \vec{k} \text{ T}$ , calcula la fuerza magnética que actúa sobre la partícula y representa gráficamente los vectores. (Datos: carga del protón  $q_p = 1.6 \cdot 10^{-19} C$ ).

### Solución

Datos:  $\vec{v} = 2 \cdot 10^5 \vec{i} \text{ m/s}$ ,  $\vec{B} = 2 \vec{k} \text{ T}$  y  $q_p = 1.6 \cdot 10^{-19} C$ .

Por la ley de Lorentz sabemos que,  $\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$ , entonces la fuerza magnética resultante es

$$\begin{aligned}\vec{F}_r &= 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (1.6 \cdot 10^{-19}) \cdot (-4 \cdot 10^5 \vec{j}) = 6.4 \cdot 10^{-14} \vec{j} \text{ N.}\end{aligned}$$

La representación gráfica de las magnitudes vectoriales del problema y la trayectoria circular que se genera se pueden ver en la figura 4.2.

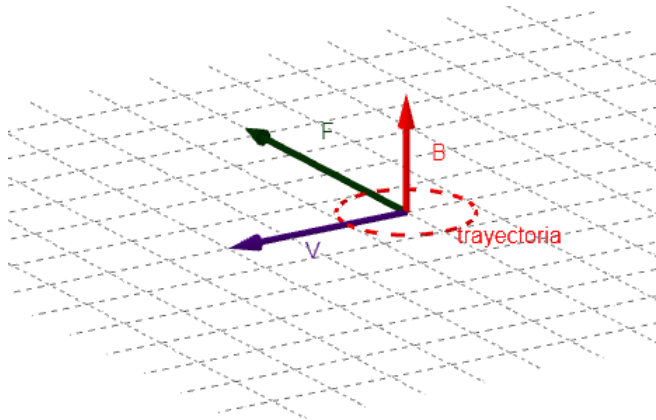


Figura 4.2: Magnitudes vectoriales y trayectoria.

## Ejercicio 72

El extremo final de una tubería de suministro está sometido a dos fuerzas  $\vec{F}_1 = 100\vec{i} - 120\vec{j} + 75\vec{k}$  N y  $\vec{F}_2 = -200\vec{i} + 250\vec{j} + 100\vec{k}$  N. Hallar el momento resultante de las fuerzas respecto al punto O de la figura 4.3. (*Momento = vector desplazamiento  $\times$  Fuerza resultante*)

### Solución

Primero calculamos la fuerza resultante,

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (100\vec{i} - 120\vec{j} + 75\vec{k}) + (-200\vec{i} + 250\vec{j} + 100\vec{k}) \\ &= -100\vec{i} + 130\vec{j} + 175\vec{k} \text{ N.}\end{aligned}$$

A continuación, hallamos el vector posición del final de la tubería con respecto al punto de referencia O.

$$\vec{r} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}.$$

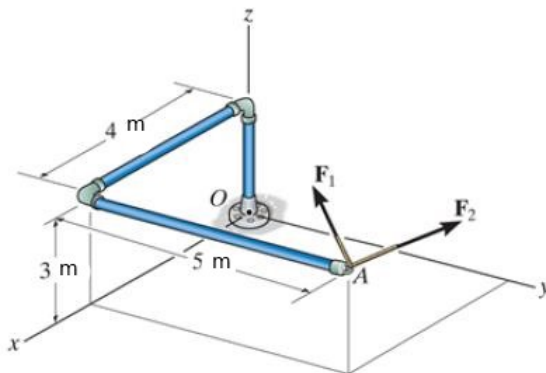


Figura 4.3: Tubería.

Ahora podemos hallar el momento resultante realizando el producto vectorial,

$$\begin{aligned}
 \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 5 & 3 \\ -100 & 130 & 175 \end{vmatrix} \\
 &= (5 \cdot 175 - 3 \cdot 130) \vec{i} - (4 \cdot 175 - 3 \cdot (-100)) \vec{j} + (4 \cdot 130 - 5 \cdot (-100)) \vec{k} \\
 &= 485 \vec{i} - 1000 \vec{j} + 1020 \vec{k} \text{ m} \cdot \text{N}
 \end{aligned}$$

### Ejercicio 73

Dados los puntos  $A(2, 1, 0)$  y  $B(1, 0, -1)$  y la recta  $r$  que determinan dichos puntos y sea  $s$  la recta de ecuación  $s : \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$ .

- Estudia la posición relativa de  $r$  y  $s$
- Determina un punto  $C$  de la recta  $s$  tal que los vectores  $\vec{CA}$  y  $\vec{CB}$  sean perpendiculares.

### Solución

- Hallamos la ecuación de la recta  $r$ ,  $\vec{v}_r = \vec{BA} = (1, 1, 1)$  por tanto

$$r : x - 2 = y - 1 = z \implies r : \begin{cases} x - y = 1 \\ x - z = 2 \end{cases}$$

Formando un sistema con las ecuaciones de las rectas  $r$  y  $s$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 0 \\ x - y = 1 \\ x - z = 2 \end{cases}$$

se observa que las rectas se interceptan en el punto  $P\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ .

b) Si  $C(x_0, y_0, z_0)$  es un punto de la recta  $s$  entonces

$$\begin{cases} x_0 + y_0 = 2 \\ y_0 + z_0 = 0 \end{cases} \implies C(2 - y_0, y_0, -y_0),$$

por tanto,

$$\overrightarrow{CA} = (2, 1, 0) - (2 - y_0, y_0, -y_0) = (y_0, 1 - y_0, y_0)$$

$$\overrightarrow{CB} = (1, 0, -1) - (2 - y_0, y_0, -y_0) = (-1 + y_0, -y_0, -1 + y_0).$$

Para que  $\overrightarrow{CA}$  y  $\overrightarrow{CB}$  sean perpendiculares se tiene que verificar que  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ ,

$$y_0(-1 + y_0) + (-y_0)(1 - y_0) + y_0(-1 + y_0) = 0 \implies 3y_0(-1 + y_0) = 0,$$

de donde se obtiene  $y_0 = 0, y_0 = 1$ , y por lo tanto los puntos son  $C_1(2, 0, 0)$  y  $C_2(1, 1, -1)$ .

## Ejercicio 74

Un dron se encuentra en el punto  $P(2, -3, 1)$  y queremos dirigirlo en línea recta hasta el punto más próximo del plano  $\pi : 3x + 4z + 15 = 0$ .

- Calcula la ecuación de la recta, en forma paramétrica, que tiene que seguir el dron. ¿Qué distancia tiene que recorrer hasta llegar al plano?
- Encuentra las coordenadas del punto  $Q$  del plano donde llegará el dron.

### Solución

- La distancia más corta se consigue en dirección perpendicular al plano, por lo tanto la dirección de la trayectoria  $r$  coincide con el vector normal al plano,  $\vec{v}_r = \vec{n}_\pi = (3, 0, 4)$  y la ecuación de la trayectoria es

$$r : \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -3 \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

La distancia que deber recorrer el dron se puede calcular hallando la distancia entre el punto  $P$  y el plano  $\pi$ ,

$$d(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5 \text{ u.}$$

- b) Las coordenadas del punto del plano se calcula hallando la intersección de la trayectoria  $r$  con el plano  $\pi$

$$3(2 + 3\lambda) + 4(1 + 4\lambda) + 15 = 0 \implies \lambda = -1$$

y el punto sería  $Q(-1, -3, -3)$ .

## Ejercicio 75

Hallar el punto simétrico  $A'$  del punto  $A(0, 1, -2)$  respecto del plano

$$\pi : 2x - y - z + 5 = 0.$$

### Solución

Para hallar el punto simétrico debemos calcular la ecuación de la recta perpendicular a  $\pi$  que pase por  $A$ , calcular el punto de intersección  $Q$  entre plano y recta (como se muestra en la figura 4.4) y por último tener en cuenta que  $Q$  será el punto medio de  $A$  y  $A'$ . La ecuación de la recta  $r$  perpendicular

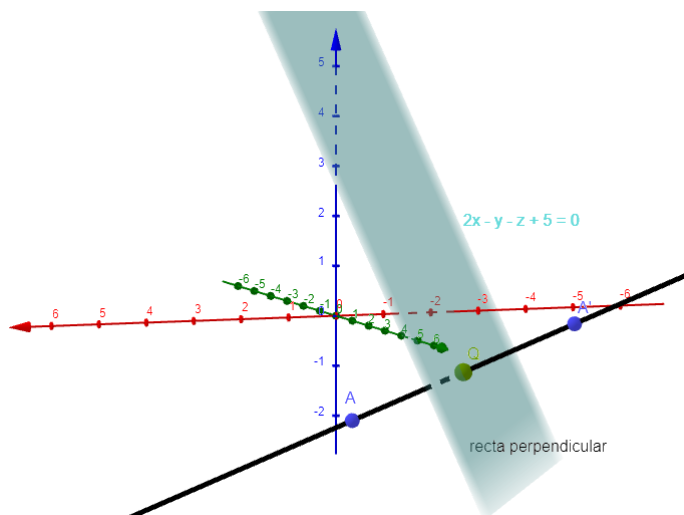


Figura 4.4: Representación del enunciado.

al plano dado y que pasa por  $A$  es

$$r : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ahora calculamos el punto de intersección  $Q$  de  $r$  con el plano de simetría,

$$2(2\lambda) - (1 - \lambda) - (-2 - \lambda) + 5 = 0 \implies \lambda = -1$$

y  $Q$  tendría de coordenadas  $Q(-2, 2, -1)$ . Aplicando ahora que  $Q = P_M(A, A')$ , es decir si  $A'(a, b, c)$  entonces

$$Q(-2, 2, -1) = \left( \frac{a}{2}, \frac{b+1}{2}, \frac{c-2}{2} \right)$$

obtenemos que  $a = -4$ ,  $b = 3$ ,  $c = 0$  y el punto simétrico es  $A'(-4, 3, 0)$ .

## Ejercicio 76

Dadas dos rectas,  $r = \frac{x-1}{a} = y = \frac{z+1}{2}$  y  $s : \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-z=2 \end{cases}$

- Hallar  $a$  para que sean coplanarias (que sean paralelas o se corten) y hallar el plano que las contiene.
- Suponiendo  $a = 1$  hallar una recta que pasa por el origen y corta a  $r$  y  $s$ .

### Solución

- Veamos en primer lugar cómo son los vectores directores de ambas rectas,

$$\vec{v}_r = (a, 1, 2), \quad \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 2, -1)$$

Para que  $r$  y  $s$  sean paralelas sus vectores directores deben ser proporcionales, es decir  $\vec{v}_r = \lambda \vec{v}_s$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces

$$(a, 1, 2) = \lambda(-1, 2, -1) \implies \begin{cases} 2\lambda = 1 \\ 2 = -\lambda \end{cases}$$

y esto es imposible. Por tanto, las rectas  $r$  y  $s$  no pueden ser paralelas. Por tanto deben ser secantes y tenemos que calcular su punto de corte.

Para ello, pasaremos ambas rectas a ecuaciones paramétricas.

Tomamos un punto de  $r$ ,  $P_r(1, 0, -1)$  y la dirección  $\vec{v}_r = (a, 1, 2)$  entonces

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + a\mu \\ y = \mu \\ z = -1 + 2\mu \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}.$$

Hacemos lo mismo con la recta  $s$ , tomamos un punto de la misma  $P_s(2, -1, 0)$  y la dirección  $\vec{v}_s = (-1, 2, -1)$ , por tanto

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Para hallar el punto de intersección igualamos las ecuaciones de las dos rectas, de lo que obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 1 + a\mu = 2 - \lambda \\ \mu = -1 + 2\lambda \\ -1 + 2\mu = -\lambda \end{cases}$$

Sustituyendo el resultado de la segunda ecuación en la tercera, obtenemos que

$$\begin{aligned} -1 + 2(-1 + 2\lambda) &= -\lambda \implies \lambda = \frac{3}{5} \\ \implies \mu &= -1 + \frac{6}{5} \implies \mu = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Por último, sustituyendo en la primera de las ecuaciones se deduce que  $a = 2$  y el punto de intersección sería  $Q(2 - \frac{3}{5}, -1 + \frac{6}{5}, \frac{-3}{5}) = (\frac{7}{5}, \frac{1}{5}, \frac{-3}{5})$ .

Para que las rectas sean coplanarias, en concreto secantes,  $a = 2$ .

Veamos ahora la ecuación del plano que las contiene, para ello tomaremos el punto intersección,  $Q(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}, \frac{-3}{5})$  y los vectores directores de ambas rectas  $\vec{v}_r$  y  $\vec{v}_s$ ,

$$\begin{aligned} \pi : \begin{vmatrix} x - \frac{7}{5} & y - \frac{1}{5} & z + \frac{3}{5} \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} &= -5\left(x - \frac{7}{5}\right) + 5\left(z + \frac{3}{5}\right) = 0 \\ \implies \pi : &-x + z + 2 = 0. \end{aligned}$$

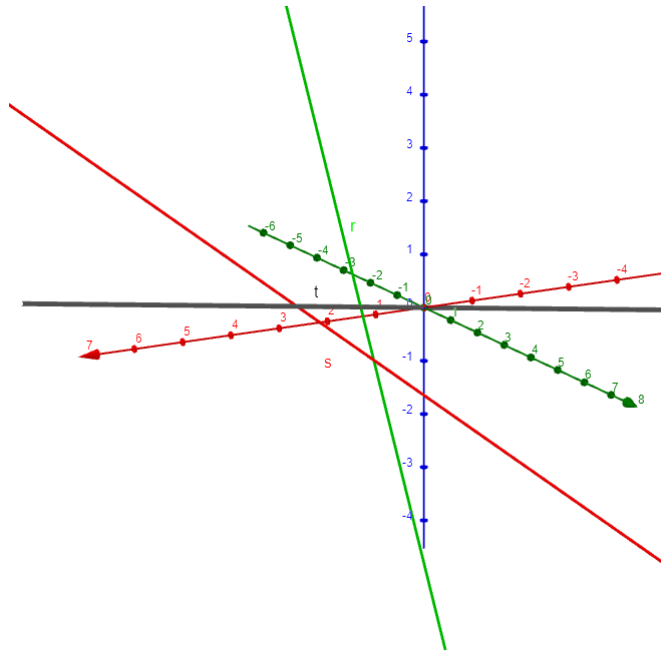


Figura 4.5: Representación del enunciado.

- b) Queremos construir una recta  $t$  que pase por el origen y corte a  $r$  y  $s$  como se muestra en la figura 4.5. Tenemos que encontrar  $P \in r$  y  $Q \in s$  tal que los vectores  $\overrightarrow{OP}$  y  $\overrightarrow{OQ}$  sean proporcionales. De la ecuación paramétrica de las dos rectas, obtengo que los vectores tienen las siguientes coordenadas

$$\overrightarrow{OP} = (1 + \mu, \mu, -1 + 2\mu) \quad \mu \in \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{OQ} = (2 - \lambda, -1 + 2\lambda, -\lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Por tanto, para que verifique que exista  $\gamma \in \mathbb{R}$  tal que  $\overrightarrow{OP} = \gamma \overrightarrow{OQ}$ , se tienen que dar las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} 1 + \mu = \gamma(2 - \lambda) \\ \mu = \gamma(-1 + 2\lambda) \\ -1 + 2\mu = -\gamma\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + 2\mu = 4\gamma - 2\gamma\lambda \\ \mu = -\gamma + 2\gamma\lambda \\ 2 + 3\mu = 3\gamma \end{cases} \Rightarrow \gamma = \frac{2 + 3\mu}{3}$$

Aplicando de nuevo reducción con la primera y última ecuación del

sistema, obtenemos

$$\begin{cases} -1 - \mu = -2\gamma + \gamma\lambda \\ -1 + 2\mu = -\gamma\lambda \end{cases} \Rightarrow \gamma = \frac{2 - \mu}{2}$$

Igualando los resultados obtenidos tenemos que,

$$\frac{2 + 3\mu}{3} = \frac{2 - \mu}{2} \Rightarrow \mu = \frac{2}{9}, \quad \gamma = \frac{2 - \frac{2}{9}}{2} = \frac{8}{9}.$$

Sustituyendo ahora en la tercera ecuación se deduce que

$$-1 + 2 \cdot \frac{2}{9} = -\frac{8}{9}\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{5}{8}$$

Por tanto el vector director de la recta  $t$ ,  $\vec{v}_t \equiv \overrightarrow{OP} \equiv \overrightarrow{OQ} \equiv \overrightarrow{PQ} = (\frac{11}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{5}{9}) \equiv (11, 2, -5)$ . Teniendo en cuenta que la recta  $t$  pasa por el origen de coordenadas, su ecuación paramétrica es:

$$\begin{cases} x = 11\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -5\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

## Ejercicio 77

Un cuadrado tiene uno de sus lados sobre la recta  $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$  y otro sobre

$s : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z}{-2}$ . Calcula el área del cuadrado.

### Solución

Para poder calcular el área del cuadrado a través de los datos del problema, las rectas deben corresponder a dos lados paralelos del cuadrado y por tanto las rectas deben ser paralelas. Comenzamos obteniendo las direcciones de ambas rectas  $\vec{v}_r = (1, -2, -1)$  y  $\vec{v}_s = (2, -4, -2)$  y como se observa  $\vec{v}_s = 2\vec{v}_r$ , por tanto las rectas son paralelas.

La medida del lado del cuadrado se puede calcular hallando la distancia entre las dos rectas y entonces  $A_{\text{cuadrado}} = l^2 = d(r, s)^2$ .

Al ser rectas paralelas,  $d(r, s) = d(r, P_s)$  siendo  $P_s$  cualquier punto de la recta  $s$ . Observando la ecuación de la recta  $s$  podemos tomar como  $P_s$  el

punto  $P_s(2, -1, 0)$ . Ahora construimos un plano perpendicular a ambas rectas y calculamos el punto de intersección  $P_r$  de dicho plano con la recta  $r$  y entonces

$$d(r, s) = d(P_s, P_r).$$

Si es un plano perpendicular a ambas rectas su ecuación general sería  $\pi : x - 2y - z + D = 0$ , ahora calculamos  $D$  sustituyendo el punto por donde pasa el plano,  $P_s$ .

$$\begin{aligned} 2 - 2 \cdot (-1) - 0 + D &= 0 \\ D &= -4. \end{aligned}$$

Por tanto la ecuación del plano es  $\pi : x - 2y - z - 4 = 0$ . Ahora calculamos la intersección de  $\pi$  con  $r$ .

$$\begin{aligned} (1 + \lambda) - 2(-2\lambda) - (3 - \lambda) - 4 &= 0 \\ \lambda &= 1 \end{aligned}$$

y el punto  $P_r$  tendría de coordenadas  $P_r(2, -2, 2)$  y  $\overrightarrow{P_r P_s} = (2, -1, 0) - (2, -2, 2) = (0, 1, -2)$ .

$$d(r, s) = d(P_s, P_r) = |\overrightarrow{P_r P_s}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}.$$

Finalmente,

$$A_{\text{cuadrado}} = d(r, s)^2 = 5u^2.$$

## Ejercicio 78

Determina la recta  $s$  que es paralela al plano  $\pi : x - z = 3$ , forma  $30^\circ$  con el plano  $\pi' : z = -2$  y pasa por el punto  $A(0, 3, 5)$ .

### Solución

Para hallar la ecuación de  $s$  necesitamos un vector director de dicha recta,  $\vec{v}_s = (a, b, c)$ . Sabemos que  $s \parallel \pi$ , por tanto  $\vec{v}_s \cdot \vec{n}_\pi = 0$  y

$$\vec{v}_s \cdot \vec{n}_\pi = (a, b, c) \cdot (1, 0, -1) = a - c = 0 \Rightarrow a = c.$$

Además,  $(s, \pi') = 30^\circ$  entonces  $(\vec{v}_s, \vec{n}_{\pi'}) = 60^\circ$  y

$$\begin{aligned} \vec{v}_s \cdot \vec{n}_{\pi'} &= |\vec{v}_s| \cdot |\vec{n}_{\pi'}| \cos(60) \\ (a, b, c) \cdot (0, 0, 1) &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \\ c &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \\ 2c^2 - b^2 &= 0 \\ b &= \pm \sqrt{2}c \end{aligned}$$

Consecuentemente,  $\vec{v}_s = (c, \sqrt{2}c, c) \equiv (1, \sqrt{2}, 1)$  o  $\vec{v}_s = (c, -\sqrt{2}c, c) \equiv (1, -\sqrt{2}, 1)$  y tendríamos dos posibilidades para la recta  $s$

$$s : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \sqrt{2}\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases} \quad \text{o} \quad s : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \sqrt{2}\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

### Ejercicio 79

Hallar el conjunto de puntos  $Q$  que distan lo mismo de los planos  $\pi_1 \equiv x + y + z - 4 = 0$  y  $\pi_2 \equiv -x + y - z + 2 = 0$ .

#### Solución

Sabemos que la distancia de un punto  $P(x_0, y_0, z_0)$  a un plano  $\pi$  de ecuación  $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$  se calcula usando la fórmula siguiente:

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Si buscamos los puntos  $Q(x, y, z)$  tal que  $d(Q, \pi_1) = d(Q, \pi_2)$ , obtenemos la siguiente ecuación

$$d(Q, \pi_1) = \frac{|x + y + z - 4|}{\sqrt{3}} = \frac{|-x + y - z + 2|}{\sqrt{3}} = d(Q, \pi_2).$$

Ahora teniendo en cuenta la definición de valor absoluto se deduce dos situaciones:

i)  $x + y + z - 4 = -x + y - z + 2$

ii)  $x + y + z - 4 = x - y + z - 2.$

De donde obtenemos las ecuaciones de los planos bisectores

i)  $\pi_3 : x + z - 3 = 0$

ii)  $\pi_4 : y = 1.$

perpendiculares entre sí (ver figura 4.6).

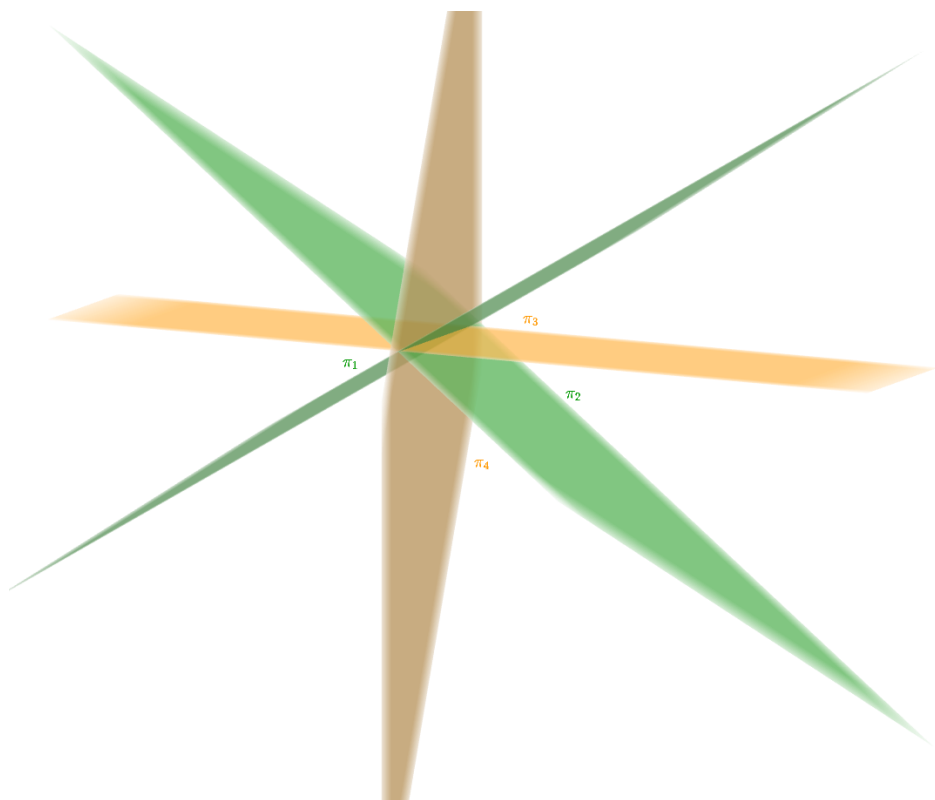


Figura 4.6: Planos del enunciado  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ , y soluciones  $\pi_3$ ,  $\pi_4$ .

### Ejercicio 80

Considera las siguientes rectas  $r \equiv \begin{cases} x + y - z - 4 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases}$  y  $s \equiv \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 5 = 0 \end{cases}$

- Estudia la posición relativa de  $r$  y  $s$ .
- Halla un punto  $P$  de  $r$  y otro punto  $Q$  de  $s$  tales que el vector  $\overrightarrow{PQ}$  sea perpendicular a ambas.
- ¿Cuántos cuadrados se pueden construir teniendo un vértice en el punto  $P$  y un lado en la recta  $s$ ?. Calcula su área.

**Solución**

- a) Para calcular la posición relativa de  $r$  y  $s$  vamos a pasar ambas rectas a paramétricas,

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (2, -1, 1), \quad P_r = (7, 0, 3) \implies r \equiv \begin{cases} x = 7 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, se ve de forma clara que  $\vec{v}_s = (0, 0, 1)$  y  $P_s(2, -5, 0)$ , por tanto su ecuación paramétrica será

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \\ z = \gamma \end{cases}, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Como vemos,  $\vec{v}_r$  y  $\vec{v}_s$  no son proporcionales, por tanto las rectas  $r$  y  $s$  no son coincidentes ni paralelas. Además si hallamos su intersección, se debe cumplir que

$$\begin{cases} 2\lambda + 7 = 2 \\ \lambda = -5 \end{cases}$$

y este sistema no tiene solución.

Por tanto,  $r$  y  $s$  se cruzan.

- b) Si  $P \in r$ , entonces  $P(7 + 2\lambda, -\lambda, 3 + \lambda)$ . Por otro lado, si  $Q \in s$  entonces  $Q(2, -5, \gamma)$  y  $\vec{PQ} = (-5 - 2\lambda, -5 + \lambda, \gamma - 3 - \lambda)$ . Además,

$$\begin{aligned} \vec{PQ} \perp r &\implies \vec{PQ} \cdot \vec{v}_r = 0 \\ &\implies 2(-5 - 2\lambda) + 5 - \lambda + \gamma - 3 - \lambda = 0 \\ \vec{PQ} \perp s &\implies \vec{PQ} \cdot \vec{v}_s = 0 \\ &\implies \gamma - 3 - \lambda = 0 \end{aligned}$$

y resolviendo el sistema

$$\begin{cases} -4\lambda - 10 + 5 - \lambda + \gamma - 3 - \lambda = 0 \\ \gamma - 3 - \lambda = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -4\lambda - \lambda = 5 \\ \gamma - \lambda = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda = -1 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores obtenidos, se deduce que  $P(5, 1, 2)$  y  $Q(2, -5, 2)$ .

- c) Con estas características se pueden construir dos cuadrados, simétricos con respecto al lado  $\vec{PQ}$  (véase figura 4.7). El área del cuadrado será

$$A_{\text{cuadrado}} = l^2 = \|\vec{PQ}\|^2 = 3^2 + 6^2 = 45 \text{ u}^2.$$

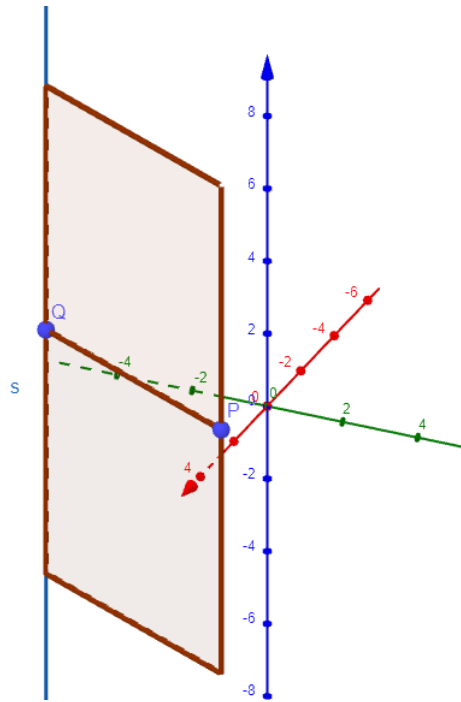


Figura 4.7: Posibles cuadrados.

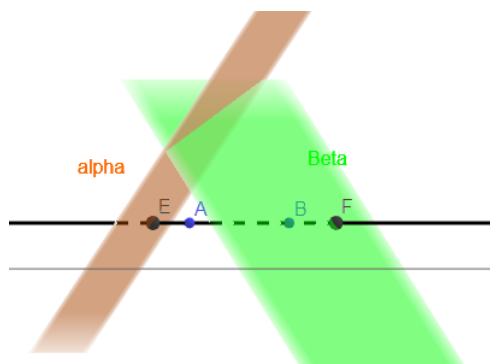
### Ejercicio 81

A la empresa de obras públicas North SA se le ha encargado la construcción de una autovía que une dos municipios de Gran Canaria. El recorrido de la misma pasa por una montaña y por razones económicas se ha decidido atravesarla construyendo un túnel. El túnel sigue la trayectoria marcada por los puntos  $A(-1, 1, 1)$  y  $B(1, 2, 1)$  y las laderas de la montaña vienen dadas por los planos cuyas ecuaciones son:  $\alpha : -9x - y + 6z = 21$  y  $\beta : 9x - y + 6z = 21$ .

- Halla la longitud del túnel.
- Para la ventilación del túnel se quiere crear un pozo vertical que conecte el punto medio entre  $A$  y  $B$  con el exterior. Calcular los extremos del pozo y su longitud.

### Solución

- Un esquema gráfico de la situación la podemos ver en la figura 4.8.  
Para hallar la longitud del túnel tenemos que calcular la distancia entre los puntos  $E$ , punto de intersección de la recta  $\overline{AB}$  con la ladera del plano  $\alpha$ , y el punto  $F$ , punto de intersección de la recta  $\overline{AB}$  con la ladera



**Figura 4.8: Representación del enunciado.**

determinada por el plano  $\beta$ . Determinamos primero la ecuación de la recta  $\overline{AB}$ .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (1, 2, 1) - (-1, 1, 1) = (2, 1, 0) \\ r = \overline{AB} &\equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Calculamos ahora las coordenadas del punto  $E$ , hallando la intersección de  $r$  con el plano  $\alpha$ .

$$\begin{aligned}-9(1 + 2\lambda) - (2 + \lambda) + 6 &= 21 \\ -19\lambda &= 26 \\ \lambda &= \frac{-26}{19}\end{aligned}$$

Por tanto,  $E = \left(1 - \frac{52}{19}, 2 - \frac{26}{19}, 1\right) = \left(\frac{-33}{19}, \frac{12}{19}, 1\right)$ .

De forma similar hallamos  $F = r \cap \beta$ ,

$$\begin{aligned}9(1 + 2\lambda) - (2 + \lambda) + 6 &= 21 \\ \lambda &= \frac{8}{17}.\end{aligned}$$

De aquí,  $F\left(\frac{33}{17}, \frac{42}{17}, 1\right)$ . Por tanto, la longitud del túnel

$$L = \|\overrightarrow{EF}\| = \sqrt{\left(\frac{33}{17} + \frac{33}{19}\right)^2 + \left(\frac{42}{17} - \frac{12}{19}\right)^2} = \sqrt{\frac{1411344}{104329} + \frac{352836}{104329}} \approx 4,11 \text{ u}$$

b) El enunciado nos dice que un extremo es el punto medio entre  $A$  y  $B$ :

$$P_M(\overline{AB}) = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 1) + \frac{1}{2}(2, 1, 0) = \left(0, \frac{3}{2}, 1\right)$$

Calculamos la ecuación de la recta  $s$  que marca la trayectoria del pozo.  $P_M \in s$  y como el túnel es vertical,  $\vec{v}_s = (0, 0, 1)$ . La ecuación en paramétricas de la recta  $s$  es:

$$s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3}{2} \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Para calcular el otro extremo del pozo, hallamos el punto de intersección de  $s$  con los planos  $\alpha$  y  $\beta$  que forman las laderas de la montaña. Como  $x = 0$  en los puntos de la recta y teniendo en cuenta las ecuaciones de los planos  $\alpha$  y  $\beta$ , se deduce que el punto de intersección pertenece a la intersección de los dos planos, es decir, a la cresta de la montaña. Sustituyendo la ecuación de la recta  $s$  en el plano  $\alpha$ , obtenemos que

$$-\frac{3}{2} + 6 + 6\lambda = 21 \implies \lambda = \frac{11}{4}.$$

Por tanto, otro extremo del pozo es el punto  $C\left(0, \frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$  y

$$L_{\text{Pozo}} = \|\overrightarrow{P_M C}\| = \frac{15}{4} - 1 = \frac{11}{4} = 2,75 \text{ u}$$

## Ejercicio 82

En el espacio afín ordinario, se considera la familia de planos

$$2mx + (m+1)y - (3m-1)z + 2m + 4 = 0.$$

- Demostrar que estos planos tienen una recta en común.
- Determina el plano de esta familia que pasa por el punto  $P(1, -1, 2)$ .
- Determinar el plano de esta familia que es paralelo a la recta

$$r : \begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ y - 5z + 2 = 0 \end{cases}$$

## Solución

- Separando en la ecuación del plano los términos que contienen la  $m$  de los que no, se tiene que

$$m(2x + y - 3z + 2) + (y + z + 4) = 0$$

por tanto los puntos de la recta  $s$  :  $\begin{cases} 2x + y - 3z + 2 = 0 \\ y + z + 4 = 0 \end{cases}$  (los dos planos que la forman no son paralelos ni coincidentes), son puntos que verifican la ecuación anterior para cualquier valor de  $m$ , por tanto cualquier plano de la familia contiene a la recta  $s$ .

b) Sustituimos las coordenadas de  $P$  en la familia de planos

$$\begin{aligned} 2m + (m+1)(-1) - (3m-1) \cdot 2 + 2m + 4 &= 0 \\ -3m + 5 &= 0 \\ m &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

De aquí se deduce que el plano de la familia que contiene a  $P$  tiene por ecuación  $5x + 4y - 6z + 11 = 0$ .

c) Podemos formar un sistema con las ecuaciones de la familia de planos y la recta  $r$  y comprobar que la matriz de coeficientes tiene rango 2 y la matriz ampliada rango 3, sería un sistema incompatible y por tanto recta y plano serían paralelos.

La matriz ampliada del sistema es

$$(A|b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 2m & m+1 & -3m+1 & -2m-4 \end{array} \right).$$

Ahora exigimos que el determinante de  $A$  sea cero,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 2m & m+1 & -3m+1 \end{vmatrix} = 0; \quad -3m+1 - 30m + 5(m+1) = 0 \Rightarrow m = \frac{3}{14}.$$

Lo que debemos comprobar a continuación es que para  $m = \frac{3}{14}$  la matriz ampliada tenga rango 3. La matriz ampliada en este caso es

$$(A|b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ \frac{3}{7} & \frac{17}{14} & \frac{5}{14} & \frac{-31}{7} \end{array} \right),$$

y podemos ver que hay menores de orden 3 con determinante distinto de cero, por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \\ \frac{3}{7} & \frac{5}{14} & \frac{-31}{7} \end{vmatrix} = 25 \neq 0.$$

Queda demostrado que para  $m = \frac{3}{14}$  el plano y la recta  $r$  son paralelos.

### Ejercicio 83

Dada la recta  $r : \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$  y el punto  $Q(1, 1, 1)$ .

- Calcular el punto  $P$  de  $r$  que verifique que  $d(P, Q) = 1$ .
- Halla la ecuación del plano  $\pi$  tal que  $Q \in \pi$  y  $d(P, Q) = d(P, \pi)$ .

### Solución

- Si  $P \in r$  entonces  $P(x, 1, 0)$  con  $x \in \mathbb{R}$ , como sabemos que  $d(P, Q) = 1$  entonces  $|\vec{PQ}| = 1$ ,  $\vec{PQ} = (1 - x, 0, 1)$  y

$$\begin{aligned} |\vec{PQ}| &= \sqrt{(1-x)^2 + 1} = 1 \\ x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

El punto  $P$  tiene de coordenadas  $P(1, 1, 0)$ .

- La ecuación general de un plano es  $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ , ahora tendremos que hallar el valor de  $A, B, C$  y  $D$ . Sabemos que  $d(P, Q) = d(P, \pi) = 1$  y

$$d(P, \pi) = \frac{A + B + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 1. \quad (4.1)$$

Por otro lado,  $Q \in \pi$  de lo que se deduce que

$$A + B + C + D = 0. \quad (4.2)$$

Formando un sistema de ecuaciones con (4.1) y (4.2) obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{-C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} &= 1 \\ C^2 &= A^2 + B^2 + C^2 \\ A^2 + B^2 &= 0 \\ A = 0 &\quad B = 0 \end{aligned}$$

y  $C = -D$ , por tanto la ecuación general de  $\pi$  es  $\pi : Cz - C = 0$ , es decir,  $\pi : z = 1$ .

### Ejercicio 84

Se quiere construir una escultura de hormigón sólida en forma de tetraedro en una rotonda de una ciudad, dicha escultura debe tener sus vértices en los puntos  $A(x, 0, 1)$ ,  $B(0, x, 1)$ ,  $C(3, 0, 0)$  y  $D(0, x, 0)$ , pero las limitaciones de la plaza indican que  $0 < x < 3$ .

- Calcula, en función de la  $x$ , cuál sería la cantidad de hormigón necesaria para realizar la escultura.
- Determina el valor de  $x$  para que la escultura sea lo más grande posible y calcula la cantidad de hormigón necesaria para realizarla.

### Solución

- Si tenemos cuatro vértices  $A, B, C, D$  del tetraedro, el volumen de dicho tetraedro es

$$V = \frac{1}{6} [\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = \frac{1}{6} (\vec{AB} \cdot (\vec{AC} \times \vec{AD}))$$

donde  $[\cdot, \cdot, \cdot]$  denota el producto mixto de vectores.

Calculamos las coordenadas de los vectores que definen el tetraedro,

$$\vec{AB} = (-x, x, 0) \quad \vec{AC} = (3-x, 0, -1) \quad \vec{AD} = (-x, x, -1)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{6} [\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -x & x & 0 \\ 3-x & 0 & -1 \\ -x & x & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} (x^2 - x^2 + x(3-x)) \\ &= \frac{1}{6} (3x - x^2) u^3. \end{aligned}$$

- Tendremos que calcular  $x$  para que el volumen de la escultura se lo máximo posible. Hallamos por tanto los máximos de la función volumen, para ello calculamos la primera derivada y la igualamos a cero,

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{6} (3x - x^2) \\ V'(x) &= \frac{1}{6} (3 - 2x) = 0 \iff x = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Calculando la segunda derivada,  $V''(x) = -\frac{1}{3} < 0$ , comprobamos que  $x = \frac{3}{2}$  es un máximo de la función volumen. Además, la cantidad de hormigón necesaria es

$$V\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{6} \left(3 \cdot \frac{3}{2} - \frac{9}{4}\right) = \frac{3}{8} u^3$$

Resumiendo, el valor de  $x$  que maximiza el tamaño del tetraedro es  $x = \frac{3}{2}$  y la cantidad necesaria de hormigón es de  $\frac{3}{8} u^3$ .



## CAPÍTULO 5

# **Estadística y Probabilidad**

*Juan Ramón Rodríguez Santana*  
*Ángelo Santana del Pino*  
*Francisco Manuel Torres Pérez*



## Ejercicio 85

En los bombos de la tradicional Lotería de Navidad en España están todos los números comprendidos entre el 0 y el 99 999 y se reparten un total de 15 304 premios de diferentes cuantías. En cambio, en la del Niño, con la misma cantidad de números se reparten 37 920 premios. ¿En cuál de los dos juegos de Loterías tengo más posibilidades de ganar un premio si compro un sólo boleto? ¿Cuál es la probabilidad de ganar el GORDO? ¿Es la misma en ambos juegos?

### Solución

En ambos sorteos hay la misma cantidad de números que pueden salir premiados. Esa cantidad es igual a 100 000 y representa el total de casos favorables a la hora de aplicar la regla de Laplace. La diferencia entre ambos sorteos es la cantidad de premios a repartir. Así en el sorteo de Navidad hay 15 304, mientras que el sorteo del Niño hay 37 920. Estas dos cantidades representarán, en ambos casos, los casos posibles. Si representamos por la letra  $G$  al suceso “*ganar un premio en el sorteo de la lotería*”, la probabilidad de dicho sucesos en ambos sorteos es:

$$\text{Sorteo de Navidad: } P(A) = \frac{15304}{100000} = 0.15304$$

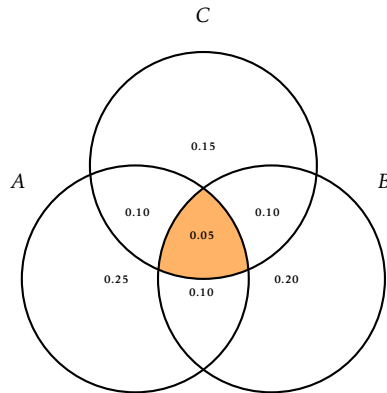
$$\text{Sorteo del Niño: } P(A) = \frac{37920}{100000} = 0.37920$$

Observamos que la probabilidad de tener un número premiado en el sorteo del Niño es más del doble que en el de Navidad.

En cambio, la probabilidad de ganar el GORDO en ambos sorteos es la misma, es decir, una entre cien mil.

## Ejercicio 86

Se ha considerado estudiar entre los habitantes mayores de edad residentes en la isla de Gran Canaria tres características: “*Estar casado*” ( $A$ ), “*tener estudios superiores*” ( $B$ ) y “*haber nacido fuera de la isla*” ( $C$ ) según las proporciones indicadas en el diagrama de Venn adjunto.



Es decir, el 5 % de los residentes en la isla tienen las tres características estudiadas, mientras que el 20 % tienen estudios superiores pero no están casados y no son naturales de la isla. Escogido al azar un residente en Gran Canaria se pide encontrar:

- La probabilidad de que esté casado.
- La probabilidad de que tenga educación superior y esté casado.
- La probabilidad de que no sea isleño de nacimiento, pero si esté casado, y que posea estudios superiores.
- La probabilidad de que no esté casado o que no tenga estudios superiores sabiendo que no es nacido en la isla.

### Solución

- Para resolver este problema no es preciso hacer grandes operaciones, sino simplemente observar el diagrama de Venn y entender el significado de cada una de las probabilidades que aparecen en él. En efecto, para responder a la primera cuestión tendremos que:

$$P(A) = P(\overline{A}) + P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\ = 0.25 + 0.10 + 0.10 + 0.05 = 0.50$$

- Seguidamente calculamos la probabilidad de que un residente en la isla esté casado y posea estudios superiores.

$$P(B \cap C) = P(B \cap C \cap \overline{A}) + P(A \cap B \cap C) = 0.10 + 0.05 = 0.15$$

- Para calcular la tercera probabilidad tendremos que considerar el suceso  $A \cap \overline{B} \cap C$  y su probabilidad se deduce inmediatamente del dibujo:

$$P(A \cap \overline{B} \cap C) = 0.10$$

- d) La última cuestión hace referencia a una probabilidad condicionada. En efecto,

$$P(\bar{A} \cup \bar{B} / C) = \frac{P[(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap C]}{P(C)}$$

Vamos a calcular en primer lugar la probabilidad del suceso  $C$ , siguiendo como ejemplo la primera cuestión de este problema.

$$\begin{aligned} P(C) &= P(\bar{C}) + P(A \cup B) + P(A \cup C) + P(A \cup B \cup C) \\ &= 0.15 + 0.10 + 0.05 + 0.10 = 0.40 \end{aligned}$$

Para calcular el denominador tendremos que echar mano de algunos conceptos del álgebra de sucesos y de los axiomas de la probabilidad.

$$\begin{aligned} P[(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap C] &= P[(\bar{A} \cup C) \cap (\bar{B} \cap C)] \\ &= P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{B} \cap C) - P(\bar{A} \cup \bar{B} \cup C) \end{aligned}$$

Solo queda por observar el diagrama de Venn y deducir que la probabilidad es:

$$P[(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap C] = 0.25 + 0.25 - 0.15 = 0.35$$

De modo que la probabilidad del suceso condicionado es:

$$P(\bar{A} \cup \bar{B} / C) = \frac{0.35}{0.40} = 0.875$$

## Ejercicio 87

Andrés y Juan son dos hermanos que se juntan con otros cuatro niños para jugar al fútbol en el parque. Para ello forman dos equipos con tres jugadores cada uno. Los niños que forman parte de cada equipo se eligen por sorteo, de tal forma que todos los niños tienen la misma probabilidad de ir a parar a cualquiera de los dos equipos.

- ¿Cuál es la probabilidad de que Andrés y Juan jueguen en el mismo equipo?
- Si los dos hermanos se juntan con otros 20 niños y forman dos equipos de 11 jugadores, también mediante sorteo, ¿cuál es ahora la probabilidad de que Andrés y Juan jueguen el mismo equipo?
- ¿Existe algún número par  $n$  de niños tal que si Andrés y Juan se juntan con ellos para jugar al fútbol y forman los equipos por sorteo como antes, la probabilidad de que jueguen juntos sea mayor que  $\frac{1}{2}$ ?

### Solución

a) Calcularemos esta probabilidad usando la regla de Laplace. Para ello necesitamos calcular:

- El número de casos posibles: dado que hay 6 niños el número de equipos posibles de tres niños es igual al número de formas de elegir a los 6 niños de 3 en 3, esto es,  $\binom{6}{3} = 20$ . Fijados los tres niños del equipo A, los otros 3 niños irán al equipo B. Si los niños están numerados del 1 al 6, los posibles enfrentamientos son:

| Equipo A | Equipo B |
|----------|----------|
| 1-2-3    | 4-5-6    |
| 1-2-4    | 3-5-6    |
| 1-2-5    | 3-4-6    |
| 1-2-6    | 3-4-5    |
| 1-3-4    | 2-5-6    |
| 1-3-5    | 2-4-6    |
| 1-3-6    | 2-4-5    |
| 1-4-5    | 2-3-6    |
| 1-4-6    | 2-3-5    |
| 1-5-6    | 2-3-4    |
| 2-3-4    | 1-5-6    |
| 2-3-5    | 1-4-6    |
| 2-3-6    | 1-4-5    |
| 2-4-5    | 1-3-6    |
| 2-4-6    | 1-3-5    |
| 2-5-6    | 1-3-4    |
| 3-4-5    | 1-2-6    |
| 3-4-6    | 1-2-5    |
| 3-5-6    | 1-2-4    |
| 4-5-6    | 1-2-3    |

- El número de casos favorables: serán aquellos casos en los que Juan y Andrés jueguen en el mismo equipo; sin pérdida de generalidad, si Juan y Andrés son los jugadores 1 y 2 vemos en la tabla anterior que hay 8 formas en que pueden jugar en el mismo equipo (4 formas en el equipo A y 4 en el B).

Por tanto la probabilidad de que Juan y Andrés jueguen en el mismo equipo es:

$$p = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0.4$$

Nótese que si no distinguieramos entre los equipos A y B, en realidad solo hay 10 enfrentamientos distintos, las diez primeras filas de la tabla anterior, ya que las siguientes 10 filas corresponden a enfrentamientos de los mismos equipos con el orden intercambiado (véase, por ejemplo, que el primer enfrentamiento es el equipo 1-2-3 frente al 4-5-6, mientras que el último es el 4-5-6 frente al 1-2-3, es decir, en realidad el primer y último enfrentamiento son el mismo; si fuera fútbol de competición la única diferencia entre los dos partidos es que el primero se jugaría en la "casa" del equipo A y el segundo en la casa del B. En cualquier caso, si los casos favorables se contaran como los 10 únicos partidos "distintos" (las diez primeras filas), habría 4 formas en que Juan y Andrés jugarían en el mismo equipo, con lo que la probabilidad de jugar en el mismo equipo sería igual que antes  $p = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ .

- b) Como en total hay 22 niños, el número de casos posibles será el número de formas de elegir 11 niños entre 22 (esos 11 irán al equipo A y los otros 11 al equipo B). En total hay

$$\binom{22}{11} = \frac{22!}{11!(22-11)!} = 705432 \text{ casos posibles.}$$

Los casos favorables son aquellos en los que Juan y Andrés juegan en el mismo equipo. Una vez fijados Juan y Andrés en el equipo A, los otros 9 jugadores deben elegirse entre los 20 niños restantes. Hay por tanto  $\binom{20}{9} = \frac{20!}{9!(20-9)!} = 167960$  formas en que Andrés y Juan jueguen juntos en el equipo A. La situación en el equipo B es simétrica, por lo que hay también 167960 formas de que los dos hermanos jueguen en el equipo B. Por tanto hay  $2 \cdot 167960$  formas de que ambos jueguen en el mismo equipo. La probabilidad pedida será entonces:

$$p = \frac{2 \cdot \binom{20}{9}}{\binom{22}{11}} = \frac{2 \cdot \frac{20!}{9!11!}}{\frac{22!}{11!11!}} = \frac{2 \cdot 20! \cdot 11!}{22! \cdot 9!} = \frac{2 \cdot 11 \cdot 10}{22 \cdot 21} = \frac{10}{21} = 0.4762$$

- c) Si hay  $n$  niños además de Juan y Andrés, tenemos en total  $n + 2$  niños para formar dos equipos de  $\frac{n+2}{2}$  niños cada equipo (como  $n$  es par, este número será siempre entero). Por tanto el número de equipos posibles es  $\binom{n+2}{\frac{n+2}{2}}$ . Asimismo, si Juan y Andrés están en el equipo A, quedan  $\frac{n+2}{2} - 2$  posiciones a ocupar en ese equipo. El número de formas en que se pueden

colocar los  $n$  niños restantes en esas posiciones es  $\binom{n}{\frac{n+2}{2}-2}$ . Igual que en los casos anteriores, la situación es simétrica en el equipo B por lo que también hay otras  $\binom{n}{\frac{n+2}{2}-2}$  formas en que ambos hermanos jueguen juntos en el equipo B. Por tanto, la probabilidad total de jugar juntos en este caso es:

$$\begin{aligned} p &= \frac{2 \cdot \binom{n}{\frac{n+2}{2}-2}}{\binom{n+2}{\frac{n+2}{2}}} = \frac{2 \cdot \frac{n!}{\left(\frac{n+2}{2}-2\right)! \cdot \left(n - \frac{n+2}{2} + 2\right)!}}{(n+2)!} \\ &= \frac{2 \cdot n! \cdot \left(\frac{n+2}{2}\right)! \cdot \left(n+2 - \frac{n+2}{2}\right)!}{\left(\frac{n+2}{2}-2\right)! \cdot \left(n - \frac{n+2}{2} + 2\right)! \cdot (n+2)!} \\ &= \frac{2 \left(\frac{n+2}{2}\right) \left(\frac{n+2}{2}-1\right)}{(n+2)(n+1)} = \frac{(n+2)n}{2(n+2)(n+1)} = \frac{n/2}{(n+1)} \end{aligned}$$

Obsérvese que la fórmula funciona en los dos casos anteriores. En el primer apartado había  $n = 4$  niños aparte de Juan y Andrés y  $p = \frac{n/2}{(n+1)} = \frac{4/2}{(4+1)} = \frac{2}{5}$ . En el segundo apartado era  $n = 20$  y  $p = \frac{n/2}{(n+1)} = \frac{20/2}{(20+1)} = \frac{10}{21}$ .

Así pues,  $p = \frac{n/2}{(n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{n+1} < \frac{1}{2}$ , por tanto  $p$  no podrá ser nunca mayor que  $\frac{1}{2}$ . Todo lo más, cuando  $n \rightarrow \infty$ , se tiene que  $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{n+1} \rightarrow \frac{1}{2}$ .

## Ejercicio 88

El “Euromillón” es un juego de lotería europeo que empezó en 2004 en el que participan un total de 9 países: España, Portugal, Reino Unido, Luxemburgo, Bélgica, Suiza, Francia, Irlanda y Austria. Para rellenar un boleto sencillo de una apuesta hay que elegir 5 números de entre el 1 y el 50 y luego seleccionar dos números estrellas entre el 1 y el 12. Hay trece categorías de premios. La 1ª categoría, la del premio mayor, consiste en acertar 5 números y 2 estrellas; y la categoría 13ª, de menor cuantía, consiste en acertar dos números y ninguna estrella.

- ¿Cuántas combinaciones posibles hay de elegir dichos números del 1 al 50?
- ¿Y cuántas combinaciones hay de elegir las estrellas?
- ¿Cuál es la probabilidad de acertar el “Euromillón”?
- ¿Cuál es la probabilidad de ganar el premio menor?

**Solución**

- a) El número de combinaciones posibles de los números del 1 al 50 se obtienen calculando las combinaciones sin repetición de 50 elementos tomados de 5 en cinco. Son combinaciones y no variaciones porque, en este caso, no importa el orden.

$$C_{50,5} = \binom{50}{5} = \frac{50!}{5! \cdot 45!} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot \cancel{45!}}{5! \cdot \cancel{45!}} = 2118760$$

Por tanto, hay 2 118 760 posibles combinaciones.

- b) Con la misma idea, podemos calcular las posibles combinaciones de las estrellas. En este caso, hay que elegir dos números de doce posibles.

$$C_{12,2} = \binom{12}{2} = \frac{12!}{2! \cdot 10!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot \cancel{10!}}{2! \cdot \cancel{10!}} = 66$$

Hay 66 posibles combinaciones para los números estrella.

- c) Para ganar el “Euromillón” es necesario acertar a la vez la combinación de los cinco números y los dos números estrella. Estas dos elecciones son independientes, de modo que si representamos por  $A$  = “acertar los cinco números” y  $B$  = “acertar los números estrella”, el suceso  $A \cap B$  representaría acertar con la combinación ganadora y su probabilidad sería:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2118760} \cdot \frac{1}{66} = \frac{1}{139838160} = 7.15 \cdot 10^{-9}$$

La probabilidad de tener una combinación ganadora es 1 entre 139 838 160 combinaciones posibles, prácticamente cero.

- d) Para averiguar la probabilidad de ganar el premio menor tenemos que tener en cuenta que se han de acertar dos de los cinco números de la combinación y ningún número estrella. Si llamamos  $A$  al suceso “acertar dos de los cinco números” y  $B$  = “no acertar ningún número estrella”. La probabilidad de que ocurra el suceso conjunto, sabiendo que estos son independientes, es la siguiente:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = P(A)$$

Para calcular la probabilidad del suceso  $A$  tenemos que comprender que la combinación que buscamos tiene únicamente dos aciertos y tres errores. Si representamos por  $N_i$  el acierto en la  $i$ -ésima extracción y por  $\overline{N}_i$  su complementario. La probabilidad de una extracción cumpla lo que

estamos buscando es:

$$\begin{aligned} & P(N_1 \cap N_2 \cap \overline{N}_3 \cap \overline{N}_4 \cap \overline{N}_5) \\ &= P(N_1) \cdot P(N_2/N_1) + \dots + P(\overline{N}_5/N_1 \cap N_2 \cap \overline{N}_3 \cap \overline{N}_4 \cap \overline{N}_5) \\ &= \frac{5}{50} \cdot \frac{4}{49} \cdot \frac{45}{48} \cdot \frac{44}{47} \cdot \frac{43}{46} = \frac{1702800}{254251200} = \frac{1419}{211876} \approx 0.0067 \end{aligned}$$

Pero claro, hay que tener en cuenta que esta es la probabilidad de una ordenación concreta de los números, realmente hay  $C_{5,2}$  ordenaciones posibles. Con esta idea, la probabilidad del suceso  $A$  es:

$$P(A) = C_{5,2} \cdot \frac{1419}{211876} = \binom{5}{2} \cdot \frac{1419}{211876} = \frac{14190}{211876} = \frac{7095}{105938} \approx 0.067$$

Otra forma de calcular esta probabilidad sería usando los números combinatorios, de la siguiente manera:

$$P(A) = \binom{5}{2} \cdot \frac{\binom{45}{3}}{\binom{50}{2} \cdot \binom{48}{3}} = \frac{7095}{105938}$$

Vamos a calcular, ahora, la probabilidad de no acertar ningún número estrella. Ya sabemos que hay 66 posibles parejas de entre los doce números. Lo que hay que conocer cuantas de estas combinaciones no son las ganadoras. Esa cantidad está representada por el número combinatorio  $C_{10,2}$  y la probabilidad de no acertar se obtiene aplicando la regla de Laplace.

$$P(B) = \frac{C_{10,2}}{C_{12,2}} = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{15}{22}$$

Ya podemos calcular la probabilidad de ganar el premio menor del juego de azar.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{7095}{105938} \cdot \frac{15}{22} = \frac{9675}{211876} \approx 0.0456$$

En este caso, la probabilidad de ganar el premio de menor categoría del “Euromillón” es del 4.56 %.

## Ejercicio 89

Un club deportivo ha fichado a cinco nuevos jugadores.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que los cinco cumplan años el mismo mes?  
 b) ¿Cuál es la probabilidad de que todos cumplan años en meses distintos?

### Solución

- a) Para resolver este apartado utilizaremos la regla de Laplace. Necesitamos calcular el número de casos favorables y el número de casos posibles. Llamando  $m_i$  al mes en que cumple años el  $i$ -ésimo jugador, el espacio muestral (el conjunto de resultados posibles) asociado a este problema es de la forma:

$$\Omega = \{(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) : m_i \in \{1, 2, \dots, 12\}\}$$

donde los valores de  $m_i$  pueden repetirse. Por tanto, el número de elementos de  $\Omega$  es el número de formas en que se pueden elegir 5 números entre 0 y 12 pudiendo repetirse e importando el orden. Por tanto los casos posibles son  $N(\Omega) = VR_{12}^5 = 12^5$ , esto es, todas las variaciones con repetición de los 12 meses del año tomados de cinco en cinco.

Los casos favorables son los correspondientes al suceso:  $A =$  Todos los cumpleaños ocurren en el mismo mes. Por tanto:

$$A = \{(1, 1, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 2, 2), \dots, (12, 12, 12, 12, 12)\}$$

El número de elementos de  $A$  (los casos favorables) es  $N(A) = 12$ . Por tanto la probabilidad pedida es:

$$p = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{12}{12^5} = \frac{1}{12^4} = 0.000048$$

- b) Ahora para calcular la probabilidad de que cumplan años en meses diferentes bastará tener en cuenta que el conjunto  $B$  de casos favorables estará formado por todos los elementos de la forma  $(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$  donde los  $m_i \in \{1, 2, \dots, 12\}$ , no pueden repetirse e importa el orden. El número de elementos de  $B$  será el número de variaciones sin repetición de 12 elementos tomados de 5 en 5, es decir:

$$N(B) = V_{12}^5 = \frac{12!}{(12-5)!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95040$$

Por tanto la probabilidad de cumplir años en meses distintos es:

$$p = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{95040}{12^5} = 0.3819$$

### Ejercicio 90

Dos amigos juegan a un juego en que deben elegir al azar un número entre 1 y 20. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos elijan el mismo número?

### Solución

Resolveremos este problema aplicando la regla de Laplace. Los casos favorables son todos aquellos consistentes en que ambos amigos elijan el mismo número: los dos eligen el 1, los dos eligen el 2, los dos eligen el 3, etc. Por tanto hay 20 casos favorables. Los casos posibles son todas las formas en que se pueden elegir dos números entre 1 y 20 pudiendo repetirse e importando el orden (pues no es lo mismo, por ejemplo, que el primer amigo elija el 5 y el segundo el 9, o que el primero elija el 9 y el segundo el 5). Por tanto hay en total  $VR_{20}^2 = 20^2 = 400$  casos posibles. Por tanto la probabilidad de que ambos elijan el mismo número es:

$$p = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{20}{400} = \frac{1}{20} = 0.05$$

### Ejercicio 91

Una urna contiene 5 bolas blancas y 3 negras. Se extrae una bola al azar, se observa su color, se deja fuera de la urna, y se introducen en ésta 2 bolas del color contrario a la que salió. Luego se extrae otra bola al azar. Sabiendo que la segunda bola extraída ha sido blanca, calcula la probabilidad de que la primera haya sido negra.

### Solución

Sean:

$C_1$  = Color de la primera bola extraída.

$C_2$  = Color de la segunda bola.

De acuerdo con la descripción del problema:

- si la primera es negra ( $C_1 = N$ ), entonces se deja fuera y se introducen dos blancas, con lo que en la urna habrían 7 blancas y 2 negras. La probabilidad de sacar una blanca la segunda vez sería en ese caso  $7/9$ .
- si la primera bola es blanca ( $C_1 = B$ ), se deja fuera y se introducen dos negras en la urna, que quedaría entonces con 4 blancas y 5 negras; de esta forma la probabilidad de sacar bola blanca la segunda vez sería  $4/9$ .

Por tanto, para resolver la cuestión planteada basta aplicar el teorema de Bayes teniendo en cuenta estas consideraciones:

$$\begin{aligned} P(C_1 = N / C_2 = B) &= \frac{P(C_2 = B / C_1 = N) P(C_1 = N)}{P(C_2 = B / C_1 = N) P(C_1 = N) + P(C_2 = B / C_1 = B) P(C_1 = B)} \\ &= \frac{\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{8}}{\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8}} = \frac{21}{21 + 20} = \frac{21}{41} \end{aligned}$$

**Ejercicio 92**

En una urna se introducen 7 bolas numeradas del 1 al 7. Se extraen dos bolas al azar. Sea  $X$  el número de la primera bola e  $Y$  el número de la segunda.

- ¿Cuál es la probabilidad de que  $X + Y = 7$  si las bolas se sacan sin reemplazamiento?
- ¿Cuánto vale esa probabilidad si las bolas se sacan con reemplazamiento?
- Se lanza una moneda legal; si sale cara se sacan dos bolas sin reemplazamiento de la urna anterior; si sale cruz se sacan con reemplazamiento. ¿Cuál es ahora la probabilidad de que  $X + Y = 7$ ?
- ¿Cuál es la probabilidad de que  $X + Y$  sea par si las bolas se sacan sin reemplazamiento?
- ¿Y si se sacan con reemplazamiento?

**Solución**

- Si las bolas se sacan sin reemplazamiento los casos posibles son todas las formas de elegir 2 números de entre 7 sin que puedan repetirse; por tanto los casos posibles son las combinaciones (sin repetición) de 7 números tomados de dos en dos, es decir:

$$\text{Casos posibles} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{(7-2)!2!} = 21$$

Los casos favorables son todas las formas de sacar dos números que suman 7, es decir 1 – 6, 2 – 5, y 3 – 4. Por tanto hay 3 casos favorables. De esta forma:

$$P(X + Y = 7 / \text{Sin reemplazamiento}) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7} = 0.1429$$

- Si las bolas se sacan con reemplazamiento, los casos posibles son todas las formas de sacar dos números entre 7 pudiendo repetirlos e importando el orden. Por tanto en este caso:

$$\text{Casos posibles} = VR_7^2 = 7^2 = 49$$

Los casos favorables son 1 – 6, 6 – 1, 2 – 5, 5 – 2, 3 – 4, 4 – 3 (importa el orden). Por tanto ahora:

$$P(X + Y = 7 / \text{Con reemplazamiento}) = \frac{6}{49} = 0.1224$$

- c) En este caso aplicamos el teorema de la probabilidad total teniendo en cuenta que como la moneda es legal:

$$P(\text{Con reemplazamiento}) = P(\text{Sin reemplazamiento}) = \frac{1}{2}$$

Entonces (llamando CR al suceso "sacar dos bolas con reemplazamiento" y SR al suceso "sacar dos bolas sin reemplazamiento"):

$$\begin{aligned} P(X + Y = 7) &= P(X + Y = 7/SR) P(SR) + P(X + Y = 7/CR) P(CR) \\ &= \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2} + \frac{6}{49} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{7} \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{7} \right) = \frac{1}{7} \cdot \frac{13}{14} = \frac{13}{98} = 0.1327 \end{aligned}$$

- d) Si las dos bolas se sacan sin reemplazamiento, los casos posibles siguen siendo 21. Los casos favorables son aquellos en los que la suma es par, por tanto, aquellos casos en que las bolas que se sacan son las dos pares o las dos impares. Como los pares son el 2, 4, y 6 hay  $\binom{3}{2} = 3$  formas de sacar dos números pares; como los impares son el 1, 3, 5 y 7 hay  $\binom{4}{2} = 6$  formas de sacar dos impares; por tanto los casos favorables son  $6 + 3 = 9$ , de donde:

$$P(X + Y = \text{par}/\text{Sin reemplazamiento}) = \frac{9}{21} = 0.4286$$

- e) Si las dos bolas se sacan con reemplazamiento, los casos posibles son, como antes  $VR_7^2 = 49$ ; los casos favorables serán todas las formas de sacar dos pares (teniendo en cuenta que pueden repetirse e importa el orden, es decir  $VR_3^2 = 9$ ) más todas las formas de sacar dos impares (que serán  $VR_4^2 = 16$ ). Por tanto:

$$P(X + Y = \text{par}/\text{Con reemplazamiento}) = \frac{9 + 16}{49} = \frac{25}{49} = 0.5102$$

### Ejercicio 93

En una caja hay 20 cartas, de las cuales 4 tienen las dos caras blancas, 6 tienen las dos caras negras y 11 tienen una cara negra y una blanca. Se extrae, sin mirarla, una carta al azar y se deja boca arriba en la mesa.

- a) Si la cara visible es negra, ¿cuál es la probabilidad de que la otra cara también sea negra?
- b) Si la cara visible es blanca ¿cuál es la probabilidad de que la otra cara sea negra?

**Solución**

- a) Aplicamos la definición de probabilidad condicionada. Llamando  $C_O$  al color de la cara oculta y  $C_V$  al color de la cara visible, el problema planteado es

$$P(C_O = N / C_V = N) = \frac{P[(C_O = N) \cap (C_V = N)]}{P(C_V = N)}$$

Para calcular  $P(C_V = N)$  hemos de tener en cuenta que cada carta se puede colocar en dos posiciones sobre la mesa (con la cara uno hacia arriba, o con la cara dos hacia arriba). Como son 20 cartas, hay 40 posibles caras que pueden quedar a la vista. De esas posibles caras hay 23 que son negras (las 6 cartas que tienen las dos caras negras suman 12 caras negras, y las 11 que tienen una cara de cada color suman otras 11 caras negras). Por tanto:

$$P(C_V = N) = \frac{23}{40} = 0.575$$

Asimismo, para calcular  $P((C_O = N) \cap (C_V = N))$  bastará tener en cuenta que de los 40 posibles resultados (extraer una de las 20 cartas y dejarla sobre la mesa en cada una de las dos posiciones posibles) hay 12 en que ambas caras son negras (se elige una de las 6 cartas con las dos caras negras, y cada una de ellas se puede colocar sobre la mesa de dos formas). Por tanto:

$$P[(C_O = N) \cap (C_V = N)] = \frac{12}{40}$$

De esta forma:

$$P(C_O = N / C_V = N) = \frac{P[(C_O = N) \cap (C_V = N)]}{P(C_V = N)} = \frac{12}{23}$$

- b) Siguiendo el mismo razonamiento del apartado anterior:

$$P(C_O = N / C_V = B) = \frac{P[(C_O = N) \cap (C_V = B)]}{P(C_V = B)} = \frac{11}{17} = 0.6471$$

**Ejercicio 94**

Se ha realizado en una zona sanitaria un estudio sobre la aparición de determinados síntomas relacionadas con procesos víricos. Se observa que uno de cada cinco pacientes presentan únicamente dolores leves de cabeza, tres de cada diez tienen únicamente molestias estomacales, una décima parte ambos síntomas y el resto no presenta síntomas. Elegida un paciente al azar encuentra las probabilidades de los siguientes sucesos:

- a) que el paciente no presente síntoma alguno.
- b) que el paciente presente al menos un síntoma.
- c) que el paciente presente ambos síntomas, sabiendo que tiene molestias estomacales.

### **Solución**

En primer lugar, identificamos los sucesos que intervienen en el ejercicio.

- $A = \text{"El paciente tiene dolores leves de cabeza"}$
- $B = \text{"El paciente tiene molestias estomacales"}$

Del enunciado del problema se deducen las siguientes datos:

$$P(A) = \frac{1}{5} \quad P(B) = \frac{3}{10} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

Con todos estos datos, ya podemos ir respondiendo a las preguntas que se plantean en el problema.

- a) En el primer apartado se pide que determinar la probabilidad del suceso  $\overline{A \cap B}$ . Para calcular dicha probabilidad es necesario hacer uso de las leyes de Morgan y de las probabilidades del suceso complementario y unión.

$$\begin{aligned} P(\overline{A \cap B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cup B)] = \\ &= 1 - \left( \frac{1}{5} + \frac{3}{10} - \frac{1}{10} \right) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

De modo, que tres de cada cinco pacientes analizados no presentan ningún tipo de síntoma.

- b) Para responder a la primera cuestión ya hemos respondido a la segunda, ya que se pide en este caso que el paciente muestre alguno de los dos síntomas. Este es el suceso unión,  $A \cup B$ , cuya probabilidad es

$$P(A \cup B) = \frac{2}{5}.$$

- c) Finalmente, se pide la siguiente probabilidad condicionada.

$$P(A \cap B / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{3}$$

## Ejercicio 95

Tres amigas, Inés, Carmen y Sofía han comprobado que en condiciones normales el tiempo que duermen de noche sigue una distribución normal de media 7.5 horas y desviación típica 0.5 horas. Sin embargo, han observado que cuando se enfrentan a situaciones de estrés en el trabajo, Inés duerme por término medio 1 hora menos cada noche, mientras que Carmen duerme una hora más y Sofía no ve alterado su patrón de sueño.

La duración del sueño en condiciones de estrés laboral sigue teniendo una duración normal con desviación típica 0.5 para las tres amigas. Suponiendo que el tiempo que duerme cada una de ellas cada día es independiente del tiempo que duermen las demás,

- En un día que las tres experimentan estrés en el trabajo, ¿cuál es la probabilidad de que sólo una de ellas duerma menos de 7 horas?
- En un día en que ninguna ha experimentado estrés, ¿Cuál es la probabilidad de que las tres duerman más de 8 horas?

### Solución

- Llamemos  $I$ ,  $C$  y  $S$  al número de horas que duermen Inés, Carmen y Sofía respectivamente. En un día en que las tres experimentan estrés en el trabajo se tiene que:

- $P(I < 7) = P\left(Z < \frac{7-6.5}{0.5}\right) = P(Z < 1) = 0.8413$ ; por tanto  $P(I \geq 7) = 1 - 0.8413 = 0.1587$
- $P(C < 7) = P\left(Z < \frac{7-8.5}{0.5}\right) = P(Z < -3) = 1 - P(Z \leq 3) = 0.0013$ ; por tanto  $P(C \geq 7) = 1 - 0.0013 = 0.9987$
- $P(S < 7) = P\left(Z < \frac{7-7.5}{0.5}\right) = P(Z < -1) = 1 - P(Z \leq 1) = 0.1587$ ; por tanto  $P(S \geq 7) = 1 - 0.1587 = 0.8413$

Por tanto, teniendo en cuenta que el número de horas que duerme cada una es independiente del tiempo que duerman las demás, la probabilidad de que sólo una de ellas duerma menos de 7 horas es:

$$\begin{aligned}
 p &= P(I < 7 \cap C \geq 7 \cap S \geq 7) + P(I \geq 7 \cap C < 7 \cap S \geq 7) + \\
 &\quad + P(I \geq 7 \cap C \geq 7 \cap S < 7) \\
 &= P(I < 7)P(C \geq 7)P(S \geq 7) + P(I \geq 7)P(C < 7)P(S \geq 7) \\
 &\quad + P(I \geq 7)P(C \geq 7)P(S < 7) \\
 &= 0.8413 \cdot 0.9987 \cdot 0.8413 + 0.1587 \cdot 0.0013 \cdot 0.8413 \\
 &\quad + 0.1587 \cdot 0.9987 \cdot 0.1587 \\
 &= 0.7322
 \end{aligned}$$

- b) Si ninguna ha experimentado estrés, el tiempo de sueño de cada una es  $N(7.5, 0.5)$ . Por tanto, la probabilidad de que las tres duerman más de 8 horas es:

$$p = P(I \geq 8 \cap C \geq 8 \cap S \geq 8) = P(I \geq 8) P(C \geq 8) P(S \geq 8) = \\ = \left[ P\left(Z \geq \frac{8 - 7.5}{0.5}\right) \right]^3 = [1 - P(Z \leq 1)]^3 = 0.1587^3 = 0.004$$

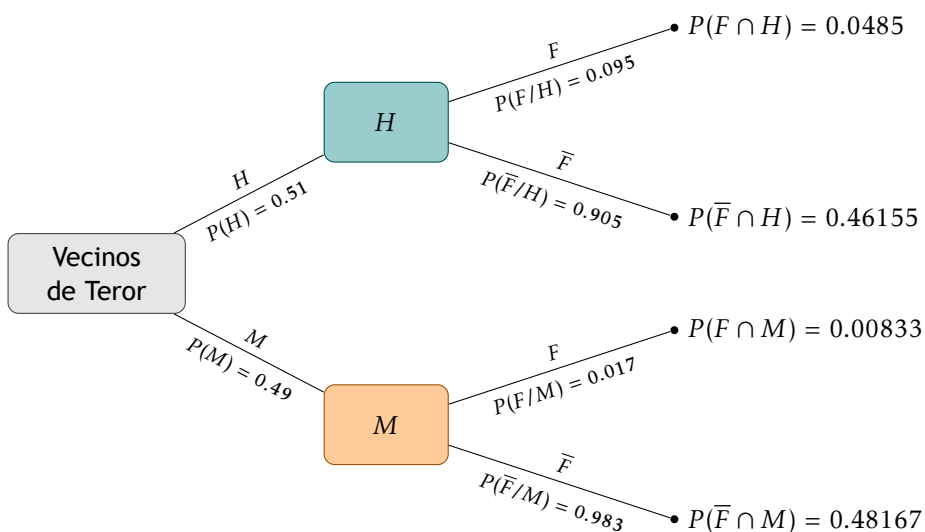
## Ejercicio 96

En Teror, el 51 % de los vecinos mayores de edad son hombres. Un adulto es seleccionado al azar para una encuesta relacionada con el uso de tarjetas de crédito. Más tarde se supo que la persona encuestada era fumador de tabaco. Además, el 9.5 % de los hombres son fumadores, mientras que el 1.7 % de las mujeres también lo son (según datos de la *Servicio Canario de Salud*). Utilice esta información adicional para encontrar la probabilidad de que el sujeto seleccionado sea un hombre.

### Solución

Identificamos, en primer lugar, los sucesos que aparecen en el enunciado del problema.

- $H$  = “Hombre”
- $M$  = “Mujer”
- $F$  = “Fumador”
- $\bar{F}$  = “No fumador”



Para poder responder a la cuestión planteada es necesario determinar la probabilidad de que una persona escogida al azar sea fumadora. Esta probabilidad se calcula haciendo uso del teorema de la probabilidad total.

$$P(F) = P(F \cap H) + P(F \cap M) = 0.04845 + 0.00833 = 0.05678$$

Conocido este valor, podemos calcular la probabilidad de que esa persona sea un hombre. Para ello, haremos uso del teorema de Bayes.

$$P(H/F) = \frac{P(H \cap F)}{P(F)} = \frac{0.004845}{0.05678} = 0.8533$$

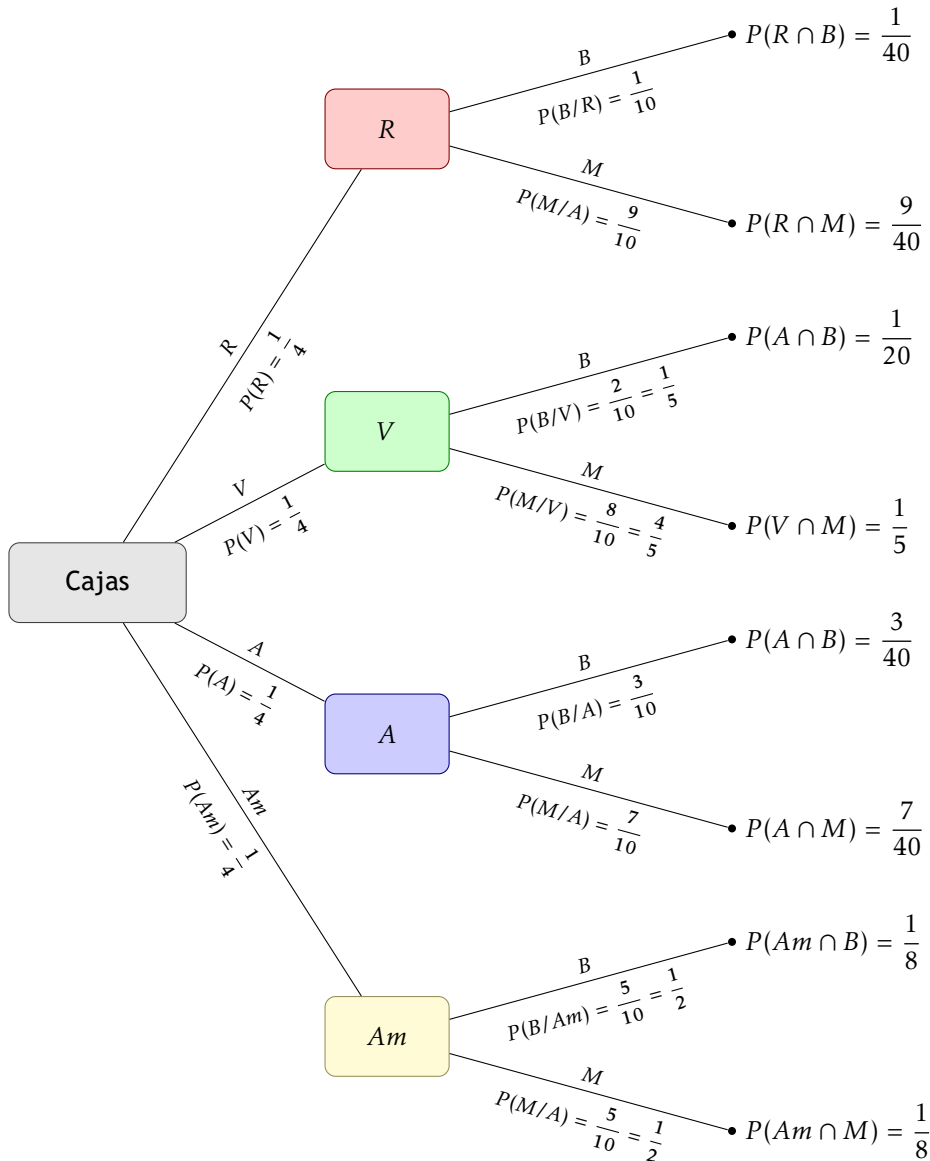
Por tanto, la probabilidad pedida es del 85.33 %.

## Ejercicio 97

En un programa de juegos, un concursante puede seleccionar una de las cuatro cajas que se le presentan. La caja roja contiene un billete de 100 € y nueve monedas de 1 €. Una caja verde contiene dos billetes de 100 € y ocho monedas de 1 €. Una caja azul contiene tres billetes y siete monedas. Una caja amarilla contiene cinco billetes y cinco monedas. El concursante selecciona una caja al azar y selecciona un billete de la caja al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que este billete haya sido extraído de la caja amarilla?

### Solución

En primer lugar debemos indicar los sucesos que intervienen en el problema. Representemos por  $R$ ,  $V$ ,  $A$ ,  $Am$  las cajas de colores rojo, verde, azul y amarillo, respectivamente. Como las cajas se escogen de forma aleatoria la probabilidad de cada una ellas es  $\frac{1}{4}$ . De igual manera representaremos por  $B$  y  $M$  la probabilidad de escoger en cada caja ya de un billete o de una moneda. Una vez determinados los sucesos es preciso calcular las probabilidades ayudándonos de un diagrama de árbol.



Para resolver el problema debemos tener en cuenta que se nos pide una probabilidad condicionada. En este caso sabemos que se ha obtenido un billete de 100 € y se quiere saber si proviene de la caja de color amarillo. En definitiva, se pide determinar la probabilidad del suceso  $Am/B$ . Esta probabilidad se calcula haciendo uso del teorema de Bayes.

$$P(Am/B) = \frac{P(Am \cap B)}{P(B)}$$

Para conocer el valor del denominador hacemos uso del teorema de la probabilidad total.

$$P(B) = P(R \cap B) + P(V \cap B) + P(A \cap B) + P(Am \cap B) = \frac{1}{40} + \frac{1}{20} + \frac{3}{40} + \frac{1}{8} = \frac{11}{40}$$

Con este dato ya podemos determinar la probabilidad pedida.

$$P(Am/B) = \frac{P(Am \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{11}{40}} = \frac{5}{11}$$

Cinco de cada once veces el concursante extraerá un billete de cien euros de la caja amarilla.

### Ejercicio 98

Supongamos que tenemos dos monedas, una de ellas normal y la otra con dos caras. Seleccionamos al azar una de las dos monedas y la tiramos tres veces. Si se obtiene cara en las tres ocasiones, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda escogida haya sido la normal?

#### Solución

Consideramos los sucesos:

- $A$  = "Seleccionar la moneda normal"
- $B$  = "Seleccionar la moneda con dos caras"

y sea  $N_C$  el número de caras que ocurren al tirar la moneda tres veces.

Cuando se usa la moneda normal, la probabilidad de sacar tres caras seguidas es  $P(N_C = 3/A) = P(Cara)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

Cuando se usa la moneda con dos caras, dicha probabilidad es  $P(N_C = 3/B) = P(Cara)^3 = (1)^3 = 1$

La probabilidad pedida puede calcularse usando el teorema de Bayes:

$$P(A/C) = \frac{P(N_C = 3/A) \cdot P(A)}{P(N_C = 3/A) \cdot P(A) + P(N_C = 3/B) \cdot P(B)} = \frac{\frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2} + 1^3 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{9}$$

### Ejercicio 99

Una máquina dedicada a la fabricación de prótesis dentales produce cada día hasta 5 piezas dentales, de acuerdo con la siguiente distribución de probabilidad:

|            |     |      |      |     |     |     |
|------------|-----|------|------|-----|-----|-----|
| $k$        | 0   | 1    | 2    | 3   | 4   | 5   |
| $P(X = k)$ | 0.1 | 0.15 | 0.15 | 0.3 | 0.2 | 0.1 |

( $X$  es el número de piezas que se fabrican diariamente).

- ¿Cuál es el número medio de piezas dentales que se fabrican diariamente?
- ¿Cuál es la desviación típica de este número?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un día se fabriquen más de 2 piezas dentales?
- Si el número de piezas dentales que se fabrica un día es independiente del número que se fabrica al día siguiente, ¿cuál es la probabilidad de que en dos días no se fabrique ninguna pieza?
- ¿Cuál es la probabilidad de que en dos días se fabrique un total de 7 piezas dentales?

### Solución

- El número medio (o valor esperado) de esta variable aleatoria se calcula como:

$$\begin{aligned}\mu = E[X] &= \sum_{k=0}^5 kP(X = k) \\ &= 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.15 + 2 \cdot 0.15 + 3 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.2 + 5 \cdot 0.1 = 2.65\end{aligned}$$

- La varianza de esta variable aleatoria es:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum_{k=0}^5 (k - \mu)^2 P(X = k) \\ &= (0 - 2.65)^2 \cdot 0.1 + (1 - 2.65)^2 \cdot 0.15 + (2 - 2.65)^2 \cdot 0.15 + \\ &\quad + (3 - 2.65)^2 \cdot 0.3 + (4 - 2.65)^2 \cdot 0.2 + (5 - 2.65)^2 \cdot 0.1 = 2.128\end{aligned}$$

y por tanto su desviación típica es:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2.128} = 1.459$$

- La probabilidad de que en un día se fabriquen más de dos piezas dentales es:

$$P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0.3 + 0.2 + 0.1 = 0.6$$

- d) Sean  $X_1$  el número de piezas que se fabrican el primer día y  $X_2$  el número de las que se fabrican el segundo. Entonces:

$$P(X_1 + X_2 = 0) = P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0)$$

y como la producción de cada día es independiente de la producción del día anterior:

$$P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = P(X_1 = 0) P(X_2 = 0) = 0.1 \cdot 0.1 = 0.01$$

- e) Para producir 7 piezas en dos días debe ocurrir que un día se produzcan 3 y otro 4, ó que un día se produzcan 2 y otro 5 (en este orden o en el contrario). Entonces:

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = 7) &= P(X_1 = 2 \cap X_2 = 5) + P(X_1 = 3 \cap X_2 = 4) + \\ &+ P(X_1 = 4 \cap X_2 = 3) + P(X_1 = 5 \cap X_2 = 2) \end{aligned}$$

Como el número de piezas del día 1 es independiente del número de piezas del día 2, cada una de las probabilidades anteriores es igual al producto de las probabilidades; por tanto:

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = 7) &= P(X_1 = 2) P(X_2 = 5) + P(X_1 = 3) P(X_2 = 4) + \\ &+ P(X_1 = 4) P(X_2 = 3) + P(X_1 = 5) P(X_2 = 2) \\ &= 0.15 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.15 = 0.15 \end{aligned}$$

## Ejercicio 100

Unos amigos han decidido montar una partida de cartas con una baraja francesa de cincuenta y dos naipes. Si un jugador saca una jota o una reina recibe 15 €. Si saca rey o un as de la baraja recibe 5 €. Si el jugador saca cualquier otra carta del mazo tiene que pagar 4 €. ¿Cuál es la ganancia esperada para un jugador?

En la baraja francesa hay cuatro jotas y cuatro reinas, así que la probabilidad de ganar 15 € es

$$p_1 = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}.$$

También hay cuatro ases y cuatro reyes, de modo que la probabilidad de ganar 5 € es

$$p_2 = \frac{2}{13}.$$

Finalmente, quedan 36 cartas en el mazo, así que la probabilidad de perder 4 € es  $p_3 = \frac{36}{26} = \frac{4}{13}$ .

La ganancia esperada por un jugador sería:

$$\mu = 15 \cdot p_1 + 5 \cdot p_2 - 4 \cdot p_3 = 15 \cdot \frac{2}{13} + 5 \cdot \frac{2}{13} - 4 \cdot \frac{9}{13} \approx 0.31$$

Por tanto, la ganancia esperada de un jugador es de 0.31 €.

### Ejercicio 101

La siguiente tabla recoge las correspondencias entre la longitud del pie (en cm) y la talla de zapato de hombre en Europa:

| cm           | talla |
|--------------|-------|
| (22.7, 23.4] | 38    |
| (23.4, 24.1] | 39    |
| (24.1, 24.7] | 40    |
| (24.7, 25.4] | 41    |
| (25.4, 26.1] | 42    |
| (26.1, 26.7] | 43    |
| (26.7, 27.4] | 44    |
| (27.4, 28.1] | 45    |

En cierta región española la longitud de pie de los hombres adultos sigue una distribución normal de media  $\mu = 25.6$  cm y desviación típica  $\sigma = 0.95$  cm.

- La empresa distribuidora de una conocida marca de zapatillas deportivas espera vender 10000 zapatillas del mismo modelo en esa región durante el próximo mes. ¿Cuántas zapatillas de cada talla debe pedir al proveedor si quiere cubrir al menos la demanda esperada de cada talla?
- Una zapatería de esta región tiene una oferta de zapatos de tallas grandes (mayores que la 41). Si durante el periodo de oferta acuden a la zapatería 10 clientes que calzan estas tallas grandes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 2 de ellos calcen más de una talla 43?
- Cualquiera que sea la talla, la zapatería ofrece zapatos en tres rangos de precio: caros, precio medio y baratos. La mitad de los zapatos que vende son de precio medio, y vende el triple de zapatos baratos que de caros. Si un mes vende 1200 zapatos, ¿cuál es la probabilidad de que más de 140 sean de los caros?

**Solución**

Sea  $T$  la talla de zapato de un hombre elegido al azar en la población. Si la talla  $t_i$  corresponde al intervalo de longitudes  $(x_{i-1}, x_i]$ , la probabilidad de que un individuo elegido al azar calce la talla  $t_i$  sería entonces:

$$\begin{aligned} P(T = t_i) &= P(L \in (x_{i-1}, x_i]) = P(L \leq x_i) - P(L \leq x_{i-1}) \\ &= P\left(Z \leq \frac{x_i - 25.6}{0.95}\right) - P\left(Z \leq \frac{x_{i-1} - 25.6}{0.95}\right) \end{aligned}$$

La proporción de sujetos en la población que calza la talla  $t_i$  es igual a la probabilidad  $P(T = t_i)$ . Podemos calcular todas estas probabilidades y ordenarlas en la siguiente tabla:

| Longitud ( $x_i$ ) | $z_i = \frac{x_i - 25.6}{0.95}$ | $P(Z \leq z_i)$ | Talla ( $t_i$ ) | $P(T = t_i)$ |
|--------------------|---------------------------------|-----------------|-----------------|--------------|
| 22.7               | -3.05                           | 0.0011          | <38             | 0.0011       |
| 23.4               | -2.32                           | 0.0102          | 38              | 0.0091       |
| 24.1               | -1.58                           | 0.0571          | 39              | 0.0469       |
| 24.7               | -0.95                           | 0.1711          | 40              | 0.1140       |
| 25.4               | -0.21                           | 0.4168          | 41              | 0.2457       |
| 26.1               | 0.53                            | 0.7019          | 42              | 0.2851       |
| 26.7               | 1.16                            | 0.8770          | 43              | 0.1751       |
| 27.4               | 1.89                            | 0.9706          | 44              | 0.0936       |
| 28.1               | 2.63                            | 0.9957          | 45              | 0.0251       |

y restando estas probabilidades obtenemos la proporción de sujetos en cada talla. Como vemos, la probabilidad de calzar una talla menor o igual que la 45 es 0.9957; por tanto la probabilidad de calzar una talla mayor que la 45 es  $P(T > 45) = 1 - 0.9957 = 0.0043$ .

- a) Para responder a este apartado basta tener en cuenta que el número de zapatillas de la talla  $t_i$  entre las 10000 zapatillas sigue una distribución binomial  $B(10000, p_i)$  siendo  $p_i = P(T = t_i)$ . Por tanto el número esperado de zapatillas que se demandan de la talla  $t_i$  es  $E[t_i] = 10000p_i$ . La tabla siguiente muestra el número esperado para cada talla:

| Talla | Número esperado de zapatos |
|-------|----------------------------|
| <38   | 11                         |
| 38    | 91                         |
| 39    | 469                        |
| 40    | 1140                       |
| 41    | 2457                       |
| 42    | 2851                       |
| 43    | 1751                       |
| 44    | 936                        |
| 45    | 251                        |
| >45   | 43                         |

- b) Llamemos  $X$  al número de clientes con una talla mayor que la 43 entre los diez que acuden a la zapatería (todos con una talla mayor que la 41). La variable aleatoria  $X$  sigue entonces una distribución binomial  $B(10, p)$  donde  $p = P(T > 43 | T > 41)$ . Téngase en cuenta que  $p$  es una probabilidad condicionada porque el enunciado nos informa de que los diez clientes calzan tallas grandes. Entonces:

$$\begin{aligned}
 p &= P(T > 43 | T > 41) = \frac{P(T > 43 \cap T > 41)}{P(T > 41)} = \frac{P(T > 43)}{P(T > 41)} \\
 &= \frac{1 - P(T \leq 43)}{1 - P(T \leq 41)} = \frac{1 - 0.8770}{1 - 0.4168} = 0.2109
 \end{aligned}$$

Por tanto, la probabilidad de que al menos dos de los diez clientes calcen más de un 43 es:

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 2) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\
 &= 1 - (1 - 0.2109)^{10} - \binom{10}{1} 0.2109 (1 - 0.2109)^9 = 0.6562
 \end{aligned}$$

- c) Llamemos  $P(B)$ ,  $P(M)$  y  $P(C)$  a las probabilidades respectivas de vender un zapato barato, de precio medio y caro. Como la mitad de los zapatos que vende son de precio medio, la probabilidad de vender un zapato de este precio es  $P(M) = \frac{1}{2}$ . El resto son baratos o caros, por lo que:

$$P(B) + P(C) = \frac{1}{2}$$

Como se vende el triple de zapatos baratos que de caros, entonces:

$$P(B) = 3P(C)$$

Sustituyendo  $P(B)$  en la ecuación anterior se tiene que:

$$3P(C) + P(C) = \frac{1}{2} \implies 4P(C) = \frac{1}{2} \implies P(C) = \frac{1}{8}$$

y por tanto:

$$P(B) = \frac{3}{8}$$

En un mes en que se han vendido 1200 zapatos, el número  $N_C$  de zapatos caros vendidos sigue una distribución binomial  $B\left(1200, \frac{1}{8}\right)$ . Esta distribución se puede aproximar por una normal

$$N\left(1200 \cdot \frac{1}{8}, \sqrt{1200 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{8}}\right) = N(150; 11,4564)$$

Por tanto, aplicando la corrección de Yates:

$$\begin{aligned} P(N_C > 140) &\approx P\left(Z \geq \frac{140.5 - 150}{11.4564}\right) = P(Z \geq -0.8292) = \\ &= P(Z \leq 0.8292) = 0.7965 \end{aligned}$$

## Ejercicio 102

Una autoescuela ha comprobado que el 15% de sus alumnos suspenden el primer examen práctico. Si hoy se presentan 10 alumnos de esta autoescuela a su primer examen práctico,

- ¿Cuál es la probabilidad de que aprueben exactamente 8?
- ¿Cuál es la probabilidad de que suspendan 3?
- ¿Cuál es la probabilidad de que no suspenda ninguno?
- De los cinco primeros alumnos que se examinan suspenden dos. ¿Cuál es la probabilidad de que no suspenda ninguno de los cinco que quedan por examinarse?

## Solución

- Si llamamos  $X$  = "Número de alumnos que aprueban entre los 10 presentados", de acuerdo con el enunciado del problema  $X$  es una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros  $n = 10$  y  $p = 0.85$ . Por tanto:

$$P(X = 8) = \binom{10}{8} 0.85^8 0.15^2 = 0.279$$

- b) Del mismo modo, si  $Y$  = "Número de alumnos que suspenden entre los 10 presentados" entonces  $Y$  es binomial de parámetros  $n = 10$  y  $p = 0.15$ . Por tanto:

$$P(Y = 3) = \binom{10}{3} 0.15^3 0.85^7 = 0.1298$$

- c) La probabilidad de que no suspenda ninguno es:

$$P(Y = 0) = P(X = 10) = 0.85^{10} = 0.1969$$

- d) Parece razonable suponer que el que un alumno apruebe o suspenda es independiente de si los demás aprueban o suspenden. Por tanto, lo que le ocurra a los 5 últimos es independiente de lo que haya ocurrido con los 5 primeros. Por tanto,  $S$  = "número de los que suspenderán entre los 5 que quedan por examinarse" seguirá una distribución binomial de parámetros  $n = 5$  y  $p = 0.15$ , por lo que la probabilidad de que no suspenda ninguno de ellos es:

$$P(S = 0) = 0.85^5 = 0.4437$$

### Ejercicio 103

La mayoría de la gente piensa que la temperatura corporal normal es de 37 °C. En 1992, el *Journal of the American Medical Association* afirmó que una cifra más precisa puede ser 36.78 °C, y que las temperaturas corporales tenían una desviación estándar de 0.7 °C. Suponiendo que esto sea cierto y que las temperaturas corporales sigan una distribución normal, responda lo siguiente:

- a) ¿En qué intervalo cae el "90 % medio" de las temperaturas corporales?
- b) ¿Qué fracción de personas se esperaría que tuviera una temperatura corporal superior a 37 °C?
- c) ¿Por debajo de qué temperatura corporal se encuentra el 20 % de la población más acalorada?

### Solución

La variable  $X$  = "temperatura corporal, en grados Celsius" sigue una distribución normal de media  $\mu = 36.78$  °C y desviación típica  $\sigma = 0.7$  °C. Es decir,  $X \sim \mathcal{N}(36.78; 0.7)$ .

En primer lugar, se pide determinar un intervalo centrado en la media en el que se concentren el 90 % de las temperaturas observadas. Es decir,

$$P(x'_0 \leq X \leq x_0) = 1 - \alpha = 0.90$$

En definitiva, se pide determinar un intervalo característico al 90 % de probabilidad, como queda representado en la figura.

Si  $1 - \alpha = 0.90 \Rightarrow \alpha = 0.10 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05$ , entonces:

$$\begin{aligned} P(-z_{0.05} \leq Z \leq z_{0.05}) &= P(Z < z_{0.05}) - P(Z < -z_{0.05}) \\ &= P(Z < z_{0.05}) - (1 - P(Z < z_{0.05})) = 0.90 \end{aligned}$$

Operando en la ecuación tenemos que:

$$\begin{aligned} 2 \cdot P(Z < z_{0.05}) - 1 &= 0.9 \Rightarrow 2 \cdot P(Z < z_{0.05}) = 1.90 \\ \Rightarrow P(Z < z_{0.05}) &= \frac{1.9}{2} \Rightarrow P(Z < z_{0.05}) = 0.95 \end{aligned}$$

Buscando en las tablas de la probabilidad:

$$\left. \begin{aligned} P(Z \leq 1.64) &= 0.9495 \\ P(Z \leq 1.65) &= 0.9505 \end{aligned} \right\} \Rightarrow z_{0.05} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645$$

De modo que el intervalo para una normal tipifica es  $(-1.645, 1.645)$ .

Finalmente, tenemos que determinar el intervalo de temperatura en que se encuentra el 90 % de los individuos.

$$\begin{aligned} -1.645 &= \frac{x'_0 - 36.78}{0.7} \Rightarrow x'_0 = 36.78 - 0.7 \cdot 1.645 = 35.63 \\ 1.645 &= \frac{x_0 - 36.78}{0.7} \Rightarrow x'_0 = 36.78 + 0.7 \cdot 1.645 = 37.90 \end{aligned}$$

Por tanto, el 90 % de los individuos tiene una temperatura corporal comprendida entre los 35.63 °C y los 37.90 °C.

Seguidamente se pide la fracción de personas que se espera que tengan una temperatura corporal a 37 °C. Simplemente, se necesita calcular la probabilidad de que elegido un individuo al azar tenga una temperatura superior a la indicada.

$$P(X > 37) = P\left(Z > \frac{37 - 36.78}{0.7}\right) = P(Z > 1.1) = 1 - P(Z \leq 1.1) = 0.1357$$

Por tanto, se espera que 13.57 % de los habitantes tengan una temperatura corporal superior a los 37 °C.

Finalmente, se pide determinar la temperatura mínima a partir de la cual se encuentra el 20 % de los individuos. Es decir, se pide determinar una temperatura  $x_0$  tal que:

$$P(X > x_0) = 0.2$$

O lo que es lo mismo,  $P(X \leq x_0) = 0.8$ . En una normal tipificada se verifica que

$$P(Z \leq z_0) = 0.8 \implies z_0 = 0.845$$

Así la temperatura mínima sería:

$$0.845 = \frac{x_0 - 36.78}{\sigma} \implies x_0 = 36.78 + 0.845 \implies x_0 = 36.949 \sim 36.95$$

Por lo tanto, el 20 % de la población tiene una temperatura superior a los 36.95 °C.

### Ejercicio 104

La duración de los embarazos se distribuye normalmente con una media de 268 días y una desviación estándar de 15 días.

- Si una mujer embarazada es seleccionada al azar, encuentre la probabilidad de que su duración del embarazo sea inferior a 260 días.
- Si 25 mujeres embarazadas reciben una dieta especial justo antes de quedar embarazadas, encuentre la probabilidad de que su duración del embarazo tenga una media inferior a 260 días (suponiendo que la dieta no tenga efecto).
- Si las 25 mujeres tienen una media de menos de 260 días, ¿parece que la dieta tiene un efecto en la duración del embarazo, y deberían preocuparse los supervisores médicos?

### Solución

Definimos la variable aleatoria  $X$  como la duración, en días, de los embarazos. Esta variable sigue una ley normal de parámetros  $\mu = 268$  y  $\sigma = 15$  días respectivamente.

La probabilidad de que la duración del embarazo de una mujer elegida al azar sea inferior a los 260 días es:

$$\begin{aligned} P(X < 260) &= P\left(Z < \frac{260 - 268}{15}\right) \\ &= P(Z < -0.53) = P(Z > 0.53) = 1 - 0.7019 = 0.2981 \end{aligned}$$

La probabilidad de que elegida una gestante al azar la duración de su período de gestación sea inferior a los 260 días es del 29.81 %.

Elegida una muestra formada por 25 mujeres la duración media,  $\bar{X}$ , de su período de gestación sigue una ley normal cuyos parámetros son:

$$\left. \begin{aligned} \mu' &= \mu = 260 \\ \sigma' &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{25}} = 0.6 \end{aligned} \right\} \implies \bar{X} \sim \mathcal{N}(260; 0.6)$$

Se pide averiguar la probabilidad de que este período medio de gestación se inferior a los 260 días.

$$P(\bar{X} < 260) = P\left(Z < \frac{260 - 268}{0.6}\right) = P(Z < -13.3) = 0$$

La probabilidad de que la duración media del embarazo sea menor a 260 días es cero.

A la vista del resultado los supervisores de la investigación no deberían preocuparse por los efectos de la dieta que siguieron las mujeres antes de quedar embarazadas.

### Ejercicio 105

Las hembras de tortugas de agua dulce de la especie *Trachemys Scripta* son, en promedio, más grandes que los machos. El peso de estas tortugas sigue una distribución normal con desviación típica de 325 gramos para los machos y 460 gramos para las hembras. Sabiendo que la proporción de hembras que pesan menos de 950 gramos es igual a la proporción de machos que superan ese peso, y que el peso medio de las hembras es un 80% superior al peso medio de los machos, ¿cuál es el peso medio de las tortugas de cada sexo?

#### Solución

Llamemos  $X$  al peso de un macho e  $Y$  al peso de una hembra elegidos al azar. De acuerdo con los datos disponibles,  $X \approx N(\mu_M, 330)$  e  $Y \approx N(\mu_H, 410)$ , siendo  $\mu_H = 1.8\mu_M$ .

Como  $P(Y < 950) = P(X > 950)$ , tipificando:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{Y - \mu_H}{410} < \frac{950 - \mu_H}{410}\right) &= P\left(\frac{X - \mu_M}{330} > \frac{950 - \mu_M}{410}\right) \\ P\left(Z < \frac{950 - \mu_H}{410}\right) &= P\left(Z > \frac{950 - \mu_M}{330}\right) \end{aligned}$$

Llamando  $z_1 = \frac{950 - \mu_H}{410}$  y  $z_2 = \frac{950 - \mu_M}{330}$ , como  $P(Z < z_1) = P(Z > z_2)$ , los valores  $z_1$  y  $z_2$  deben ser iguales en valor absoluto y de signos contrarios:

Por tanto,  $z_2 = -z_1$ , de donde,  $\frac{950 - \mu_M}{330} = -\frac{950 - \mu_H}{410}$ . Sustituimos  $\mu_H = 1.8\mu_M$  y nos queda:

$$\begin{aligned} \frac{950 - \mu_M}{330} &= -\frac{950 - 1.8\mu_M}{410} \implies 410(950 - \mu_M) = -330(950 - 1.8\mu_M) \\ &\implies (410 + 330)950 = (410 + 330 \cdot 1.8)\mu_M \\ &\implies \mu_M = \frac{740 \cdot 950}{1004} = 700.2 \\ &\implies \mu_H = 1260.36 \end{aligned}$$

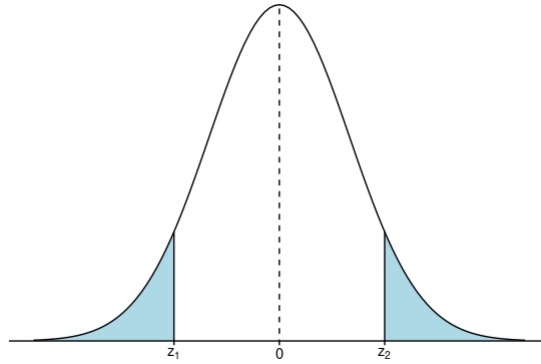


Figura 5.1: Curva normal.

### Ejercicio 106

El peso (en gramos) de las latas de atún de cierta marca es una variable aleatoria con distribución normal de media  $\mu = 250$  gramos y desviación típica  $\sigma = 9$  gramos. Calcula

- ¿Qué peso es superado sólo por un 1 % de las latas de esta marca?
- ¿Cuál es el valor  $a$  tal que solo el 50 % de las latas se encuentra en el intervalo  $[\mu - a, \mu + a]$

### Solución

- Sea  $X = \text{"Peso de una lata de atún"} \approx N(\mu = 250, \sigma = 9)$ .

Se quiere encontrar el peso  $p$  tal que:

$$P(X > p) = 0.01$$

o lo que es lo mismo:

$$P(X \leq p) = 0.99$$

Tipificando:

$$P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{p - \mu}{\sigma}\right) = 0.99 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{p - \mu}{\sigma}\right) = 0.99$$

Buscamos ahora en la tabla de la normal  $N(0, 1)$  el valor  $z_0$  tal que  $P(Z \leq z_0) = 0.99$ . Para ello buscamos dentro de la tabla el valor más parecido a 0.99 y encontramos el 0.9901 en el cruce de la fila 2.3 y la columna 0.03, es decir,  $P(Z \leq 2.33) = 0.9901$ . También es muy parecido

el valor 0.9898, en el cruce de la fila 2.3 y la columna 0.02, lo que significa que  $P(Z \leq 2.32) = 0.9898$ . Podemos entonces aproximar que  $P(Z \leq 2.325) = 0.99$

Por tanto:

$$\frac{p - \mu}{\sigma} = 2.325 \Rightarrow \frac{p - 250}{9} = 2.325 \Rightarrow p = 250 + 9 \cdot 2.325 = 270.925$$

b) Queremos encontrar el valor de  $a$  tal que

$$P(\mu - a \leq X \leq \mu + a) = 0.5$$

Tipificando:

$$P\left(\frac{\mu - a - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\mu + a - \mu}{\sigma}\right) = 0.5$$

de donde:

$$P\left(-\frac{a}{9} \leq Z \leq \frac{a}{9}\right) = 0.5$$

Como los extremos del intervalo son simétricos, el área bajo la curva normal por encima de  $\frac{a}{9}$  debe ser 0.25, y el área por debajo de  $-\frac{a}{9}$  debe ser también 0.25. Entonces:

$$P\left(Z > \frac{a}{9}\right) = 0.25 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{9}\right) = 0.75$$

Si buscamos el valor 0.75 en el interior de la tabla de la normal, encontramos que  $P(Z \leq 0.67) = 0.7486$  y  $P(Z \leq 0.68) = 0.7517$ . Por tanto podemos aproximar:

$$P(Z \leq 0.675) = 0.75$$

Así pues:

$$\frac{a}{9} = 0.675 \Rightarrow a = 9 \cdot 0.675 = 6.075$$

Por tanto la mitad de las latas de atún de esta marca pesan entre  $\mu - a = 250 - 6.075 = 243.925$  y  $\mu + a = 250 + 6.075 = 256.075$  gramos

## Ejercicio 107

El sexo de las tortugas depende de la temperatura a que se incuban los huevos; cuando la temperatura de incubación es inferior a  $27.7^{\circ}\text{C}$  las tortugas nacen machos; si se incuban por encima de  $31^{\circ}\text{C}$  nacen hembras. Cuando la temperatura está entre estos dos valores la mitad de las tortugas nacen machos y la otra mitad hembras. Un investigador observa que la temperatura de los nidos de tortuga en una playa sigue una distribución normal de media  $29^{\circ}\text{C}$  y desviación típica  $1.5^{\circ}\text{C}$ . Si se elige un nido al azar de esta playa, y de dicho nido se extrae un huevo,

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que de ese huevo nazca una tortuga hembra?  
 b) Si la tortuga que nace es macho ¿cuál es la probabilidad de que ese nido haya estado a una temperatura inferior a  $28.5^{\circ}\text{C}$ ?

### Solución

- a) Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(H) = P(H/T \leq 27.7)P(T \leq 27.7) \\ + P(H/27.7 < T \leq 31)P(27.7 < T \leq 31) + P(H/T > 31)P(T > 31)$$

donde:

- $P(H/T \leq 27.7) = 0$
- $P(H/27.7 < T \leq 31) = \frac{1}{2}$
- $P(H/T > 31) = 1$
- $P(T \leq 27.7) = P\left(Z \leq \frac{27.7-29}{1.5}\right) = P(Z \leq -0.87) = P(Z > 0.87) = 1 - P(Z \leq 0.87) = 1 - 0.8078 = 0.1922$
- $P(T > 31) = 1 - P(T \leq 31) = 1 - P\left(Z \leq \frac{31-29}{1.5}\right) = 1 - P(Z \leq 1.33) = 0.0918$
- $P(27.7 < T \leq 31) = 1 - P(T \leq 27.7) - P(T > 31) = 1 - 0.1922 - 0.0918 = 0.716$

Por tanto:

$$P(H) = 0 \cdot 0.1922 + \frac{1}{2} \cdot 0.716 + 1 \cdot 0.0918 = 0.4498$$

- b) Aplicando la definición de probabilidad condicionada:

$$P(T < 28.5/M) = \frac{P(\{T < 28.5\} \cap M)}{P(M)}$$

Ahora bien: el valor de  $P(M)$  es el complementario de  $P(H)$ , esto es,  $P(M) = 1 - P(H) = 1 - 0.4498 = 0.5502$ , y el valor de  $P(\{T < 28.5\} \cap M)$

$$\begin{aligned} P(\{T < 28.5\} \cap M) &= P(\{T < 27.7\} \cup \{27.7 \leq T \leq 28.5\} \cap M) \\ &= P(\{T < 27.7\} \cap M) \cup \{27.7 \leq T \leq 28.5\} \cap M) \\ &= P(\{T < 27.7\} \cap M) + P(\{27.7 \leq T \leq 28.5\} \cap M) \\ &= P(M/T < 27.7)P(T < 27.7) + P(M/27.7 \leq T \leq 28.5)P(27.7 \leq T \leq 28.5) \\ &= 1 \cdot P(T < 27.7) + \frac{1}{2} \cdot (P(T \leq 28.5) - P(T \leq 27.7)) \\ &= \frac{1}{2} (P(T < 27.7) + P(T \leq 28.5)) = \frac{1}{2} (0.1922 + 0.3707) = 0.28145 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$P(T < 28.5/M) = \frac{0.28145}{0.5502} = 0.5115$$

### Ejercicio 108

Un avión Boeing 767-300 tiene 213 asientos. Cuando alguien compra un billete para un vuelo, hay una probabilidad de 0.0995 de que la persona no se presente al vuelo. Un agente de billetes acepta 236 reservas para un vuelo que utiliza un Boeing 767-300. Encuentre la probabilidad de que no haya suficientes asientos disponibles. ¿Esta probabilidad es lo suficientemente baja como para que la sobreventa no sea una preocupación real? Si no, ¿cuántas entradas se deben vender para que la probabilidad sea inferior al 10 % de que al menos una persona no tenga asiento?

#### Solución

Cuando un pasajero compra a la agencia de viajes un billete de avión está reproduciendo un experimento de Bernuolli, donde la probabilidad de no ocupar el asiento es  $q = 0.0995$  y, por tanto, la probabilidad de ocupar ese asiento es  $p = 1 - q = 1 - 0.0995 = 0.9005$ . La agencia ha vendido  $n = 236$  billetes, definiéndose  $X$  como el número de reservas confirmadas. Esta variable sigue una distribución binomial de parámetros  $n = 236$  y  $p = 0.9005$ , es decir,  $X \sim \mathcal{B}(236, 0.9005)$ .

Esta variable cumple las condiciones para aproximarse por una distribución normal  $Y$  de parámetros:

$$\begin{aligned}\mu &= n \cdot p = 236 \cdot 0.9005 = 212.518 \\ \sigma &= \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{236 \cdot 0.9005 \cdot 0.0995} = 4.5984\end{aligned}$$

Además esta aproximación es buena porque se cumple que  $n \cdot p = 212.518 \gg 5$  y  $n \cdot q = 23.482 \gg 5$ .

Para responder a la primera de las dos cuestiones planteadas es necesario considerar que el avión tiene 213 plazas. Así que para conocer la probabilidad de que algún pasajero se quede en tierra hay que conocer la probabilidad de la variable  $X$  sea mayor que 213. En efecto,

$$\begin{aligned}P(X > 213) &= P(Y \geq 213.5) = P\left(Z \geq \frac{213.5 - 212.518}{4.5984}\right) \\ &= P(Z \geq 0.21) = 1 - P(Z < 0.21) = 0.4168\end{aligned}$$

La probabilidad de que hayan confirmado la reserva más 213 pasajeros es del 41.68 %. Esta probabilidad no es pequeña y, por tanto, hay un riesgo cierto que algún pasajero se quede sin viajar por no haber asientos disponibles.

Si queremos que la probabilidad de que al menos una persona no tenga un asiento sea inferior a 10 %, entonces tenemos que limitar el número de reservas aceptadas a 230.

## Ejercicio 109

Estudios de la Dirección General de Tráfico afirman que de cada cinco personas accidentadas en España el pasado año dos eran mujeres.

Calcula la probabilidad de que en los próximos cien accidentes de tráfico:

- Menos la quinta parte de las personas accidentadas sean hombres.
- Qué más de la 70 % de los accidentados sean mujeres.
- El número de accidentados esté entre el 40 y el 60 %.

### Solución

Nos enfrentamos a un problema donde tenemos que hacer uso de la distribución de proporciones muestrales. Si toma en consideración una muestra formada por 100 accidentes,  $n = 100$ , la proporción de accidentados,  $\hat{p}$ , sigue una ley normal de parámetros:

$$\mu = \frac{x}{n} = \frac{3}{5} = 0.6 \quad \sigma = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{100}} = 0.049$$

Por tanto,  $\hat{p} \sim \mathcal{N}(0.6; 0.049)$ .

- La probabilidad de que menos de la quinta parte, es decir 0.2, de las personas accidentadas sean hombres es:

$$P(\hat{p} < 0.2) = P\left(Z < \frac{0.2 - 0.6}{0.049}\right) = P(Z < -8.16) = 0$$

Como se puede apreciar esa probabilidad es nula.

- Por otra parte, para calcular la probabilidad que de más del 70 % de los accidentados sean mujeres tendremos que considerar una nueva variable que mida la proporción de mujeres accidentadas. Esta nueva variable que representaremos por  $\hat{q}$  sigue una ley normal de media  $\mu = \frac{2}{5} = 0.4$  y desviación típica  $\sigma = 0.049$ . Con estos datos podemos calcular la probabilidad pedida.

$$P(\hat{q} > 0.7) = P\left(Z > \frac{0.7 - 0.4}{0.049}\right) = P(Z > 6.12) = 0$$

De igual forma que en el apartado anterior, la probabilidad pedida es nula.

- Finalmente, calculamos la probabilidad de que la proporción de hombres accidentados esté comprendida entre el 40 y el 60 %.

$$\begin{aligned} P(0.40 \leq \hat{p} \leq 0.6) &= P\left(\frac{0.4 - 0.6}{0.049} \leq Z \leq \frac{0.6 - 0.6}{0.049}\right) \\ &= P(-4.08 \leq Z \leq 0) \\ &= P(0 \leq Z \leq 4.08) = 0.5 \end{aligned}$$

Por tanto, la probabilidad pedida es del 50 %.

### Ejercicio 110

Beatriz y Laura comparten un reproductor de música digital que tiene una función que selecciona aleatoriamente qué canción reproducir. Se cargaron un total de 2345 canciones en el reproductor, algunas de Beatriz y el resto de Laura. Supongamos que cuando el reproductor estaba en el modo de selección aleatoria, 36 de las primeras 50 canciones seleccionadas eran canciones cargadas por Beatriz.

- Construye e interpreta un intervalo de confianza al 90 % de probabilidad para la proporción de canciones en el reproductor que fueron cargadas por Beatriz.
- ¿Qué tan grande sería necesaria una muestra para estimar la proporción de canciones cargadas por Beatriz con un 99 % y con un margen de error del 5 % como máximo?

### Solución

En primer lugar es necesario comprender que nos encontramos con una muestra formada por  $n = 50$  canciones de las cuales las 36 primeras fueron cargadas por Beatriz. De modo que se puede calcular la proporción muestral,  $\hat{p}$ , de canciones como:  $\hat{p} = \frac{36}{50} = 0.72$ .

El intervalo de confianza para la proporción poblacional a un nivel de confianza del 90 % es

$$p \in \left( \hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \right)$$

$$p \in \left( 0.72 - 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.72 \cdot 0.28}{50}}; 0.72 + 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.72 \cdot 0.28}{50}} \right)$$

Lo que significa que a un 90 % de probabilidad la proporción de canciones cargadas en el reproductor que fueron cargadas por Beatriz se encuentra entre 61.55 y 82.45 %, respectivamente.

Para responder tenemos que determinar el tamaño de la muestra para que:

$$z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 0.05$$

de donde se sigue que

$$n = \left( \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{0.05} \right)^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q} = \left( \frac{1.645}{0.05} \right)^2 \cdot 0.72 \cdot 0.28 = 536.7720$$

En este caso la muestra debería estar formada por un mínimo de 537 canciones.

## Ejercicio 111

En un pueblo vaciado de España se hace un llamamiento a su población para hacer un estudio de positividad en Coronavirus tras una fiesta popular. De sus 2000 habitantes, han dado resultado positivo un 67.5 % de la población.

- Teniendo en cuenta que el 70 % de la población presentaban síntomas de contagio y de estos un 10 % no dieron positivo en el test, calcular cuántos habitantes de los que no presentaban síntomas dieron positivo en el test.
- ¿De qué tamaño debería ser la muestra a escoger si tomáramos como información de positividad la del pueblo vaciado de España con una confianza del 95 % y con un error inferior al 1 %?

### Solución

Para resolver la primera cuestión podemos recurrir a la elaboración de un árbol de probabilidades o bien utilizar una tabla de contingencia.

|              | Positivos | Negativos | Total |
|--------------|-----------|-----------|-------|
| Con síntomas |           |           |       |
| Sin síntomas |           |           |       |
| Total        |           |           | 2000  |

Sabemos que el 67.5 % de los habitantes del pueblo han dado positivo.

|              | Positivos                 | Negativos           | Total |
|--------------|---------------------------|---------------------|-------|
| Con síntomas |                           |                     |       |
| Sin síntomas |                           |                     |       |
| Total        | $0.675 \cdot 2000 = 1350$ | $2000 - 1350 = 650$ | 2000  |

También sabemos que el 70 % de los habitantes del pueblo mostraban síntomas compatibles con el COVID.

|              | Positivos | Negativos | Total                    |
|--------------|-----------|-----------|--------------------------|
| Con síntomas |           |           | $0.70 \cdot 2000 = 1400$ |
| Sin síntomas |           |           | $2000 - 1400 = 600$      |
| Total        | 1350      | 650       | 2000                     |

El 90 % de las personas con síntomas dieron positivo.

|              | Positivos                | Negativos           | Total |
|--------------|--------------------------|---------------------|-------|
| Con síntomas | $0.90 \cdot 1400 = 1260$ | $1400 - 1260 = 140$ | 1400  |
| Sin síntomas | $350 - 1260 = 90$        | $600 - 90 = 510$    | 600   |
| Total        | 1350                     | 650                 | 2000  |

Por tanto, el número de personas que careciendo de síntomas compatibles con el COVID dieron positivo en los tests, falsos positivos, fueron 90.

Para determinar el tamaño mínimo de la muestra, tal como se pide en la segunda cuestión, para asegurar un error menor que 1 % con un nivel de confianza del 95 % se debe considerar como valor crítico  $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ .

$$n = \left( \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{E} \right)^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q} \implies n = \left( \frac{1.96}{0.01} \right)^2 \cdot 0.70 \cdot 0.30 \implies n = 8067.83$$

La muestra debe estar formada por 8068 individuos como mínimo.

## Ejercicio 112

Una encuesta dirigida a 150 familias de cierta comunidad autónoma, reveló que, en el 87 % por ciento de los casos, por lo menos uno de los miembros de la familia tenía algún seguro relacionado con la salud. En una encuesta anterior realizada en las mismas condiciones proporcionó el 90 %.

Determina con una seguridad del 99 %, si habría cambios en el parámetro poblacional según el resultado de la encuesta anterior.

### Solución

Nos enfrentamos a un problema donde se pide la construcción de un intervalo de confianza para la proporción poblacional y comprobar si el valor determinado previamente por el encuestador se encuentra dentro de dicho intervalo.

Bajo estas condiciones definimos la variable aleatoria  $X$  como el “*número de familias donde al menos uno de sus miembros tiene contratado un seguro médico*”. Tomada una muestra formada por  $n = 150$  familias, se tiene una proporción muestral  $\hat{p} = 0.87$ . Conocidos el tamaño de la muestral y la proporción muestral, y sabiendo que el valor crítico para un nivel de confianza del 99 % es  $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575$ , el intervalo de confianza es:

$$p \in \left( \hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \right)$$

$$p \in \left( 0.87 - 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.87 \cdot 0.13}{150}}; 0.87 + 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.87 \cdot 0.13}{150}} \right)$$

Efectuando las operaciones indicadas se obtiene como resultado el intervalo (0.7993 ; 0.9497). Esto significa que con una probabilidad del 99 % la proporción de familias que han contratado un seguro médico está comprendida entre 79.93 y 94.97 %, respectivamente.

Finalmente nos queda por responder a la pregunta planteada en el problema. Para ello bastará con observar que la proporción determinada por el encuestador,  $p = 0.87$ , se encuentra dentro del intervalo ya calculado. La respuesta es obvia y podemos afirmar que no se han producido cambios.

### Ejercicio 113

Estamos interesados en averiguar el porcentaje con el que se da una determinada característica en una muy amplia población y para ello decidimos realizar un muestreo aleatorio simple. Para hacer dicho trabajo tenemos de presupuesto 100000 € pero el coste de cada encuesta, personal, seguro, etcétera es de 1000 € euros. Si se pretende trabajar con un error del 8 % ¿Cuál será el nivel de confianza con el que trabajaremos, si conocemos que dicha característica a estudiar es imposible que se de en más del 35 % de la población?

#### Solución

En este problema se pide determinar el nivel de confianza utilizado para conseguir un error inferior al 8 %. Para conocer este valor tendremos que utilizar la expresión el error máximo admisible en una inferencia sobre la proporción.

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E}{\sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = E \cdot \sqrt{\frac{n}{\hat{p} \cdot \hat{q}}}$$

Tan solo nos queda por sustituir los datos del problema en esta expresión. Sabemos que se dispone de un presupuesto total de 100000 € y que cada encuesta tiene un precio de 1000 €, por tanto se han podido realizar  $n = \frac{100000}{1000} = 100$  encuestas; además que la proporción muestral es  $\hat{p} = 0.35$ . Con todos estos datos podemos calcular el valor de  $z_{\frac{\alpha}{2}}$ .

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = 0.08 \cdot \sqrt{\frac{100}{0.35 \cdot 0.65}} = 1.68$$

Ahora buscamos en la tabla de la normal tipificada la probabilidad que de la variable  $Z$  sea menor que 1.68 y esta corresponde al valor 0.9535.

$$P(Z \leq 1.68) = 0.9535 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.9535 = 0.0465 \Rightarrow \alpha = 2 \cdot 0.0465 \\ \Rightarrow \alpha = 0.093$$

Conocido el nivel de significación podemos conocer el de confianza como  $1 - \alpha = 1 - 0.093 = 0.907$ .

Por tanto, el nivel de confianza trabajado fue del 90.7 %.

### Ejercicio 114

Un centro de investigación ha diseñado un programa de fisioterapia con la Wii, para que los pacientes de rehabilitación puedan hacer los ejercicios en casa. El centro desea saber si con el uso de dicho programa el tiempo de recuperación es menor. Para ello utilizaron el programa sobre 2350 pacientes y se obtuvo que 650 pacientes necesitaron más de dos semanas de rehabilitación. Los datos estimados hasta el momento sobre este tipo de rehabilitaciones indicaban que en el 40 por ciento de los casos la rehabilitación era superior a dos semanas. Calculando un intervalo de confianza al 95 por ciento explica si los datos obtenidos con el uso de la Wii mejoran los datos estimados previamente.

#### Solución

Se pide determinar un intervalo de confianza para la proporción poblacional de personas que requirieron más de dos semanas de rehabilitación. Con tal fin se tomó una muestra formada por  $n = 2350$  de las cuales 650 necesitaron más de semanas, por tanto la proporción muestral fue en este caso de  $\hat{p} = \frac{650}{2350} = 0.28$ . Para construir el intervalo de confianza es necesario considerar el valor crítico  $z_{\frac{\alpha}{2}}$  para un nivel de confianza del 95 % que es 1.96. Por tanto, el intervalo de confianza pedido es:

$$p \in \left( \hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \right)$$

$$p \in \left( 0.28 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.28 \cdot 0.72}{2350}}; 0.28 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.28 \cdot 0.72}{2350}} \right)$$

Efectuando las operaciones indicadas se tiene que el intervalo de confianza pedido es (0.2618; 0.2982).

En consecuencia podemos afirmar con una probabilidad del 95 % que la proporción de pacientes que requieren más de semanas de rehabilitación está entre el 26.18 % y el 29.82 %, respectivamente.

Como los datos estimados previamente eran del 40 % podemos determinar que los datos obtenidos con la wii mejoran los datos de rehabilitación.

### Ejercicio 115

Se ha realizado un estudio sobre el consumo anual, en litros, de bebidas energéticas entre adolescentes canarios con edades comprendidas entre 16

y 18 años. Tomando una muestra de 20 adolescentes los resultados obtenidos fueron los siguientes:

|    |     |     |     |    |     |     |     |     |     |
|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 82 | 266 | 170 | 222 | 97 | 169 | 0   | 130 | 199 | 174 |
| 93 | 110 | 130 | 0   | 93 | 115 | 102 | 164 | 113 | 171 |

Si consideramos que dicha población se distribuye normalmente, ¿entre qué valores se encuentra el consumo anual de bebidas energéticas con una seguridad del 99 %?

### Solución

Consideramos la variable aleatoria  $X$  como el “*el consumo, en litros, de bebidas energéticas entre los jóvenes canarios con edades comprendidas entre 16 y 18 años*”. Sabemos que esta variable sigue una ley normal de parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  desconocidos. Disponemos únicamente de una muestra formada por  $n = 20$  adolescentes de donde se pueden calcular la media muestral  $\bar{X} = 130$  y la desviación típica muestral  $S_{20} = 63.7354$  l, respectivamente.

Para poder determinar el intervalo de confianza pedido vamos a considerar como  $\sigma$  el valor obtenido de la muestra. De modo que si tenemos en cuenta que el valor crítico para el nivel de confianza propuesto es  $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575$ , el intervalo de confianza es:

$$\begin{aligned}\mu &\in \left( \bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_n}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \\ \mu &\in \left( 130 - 2.575 \cdot \frac{63.7354}{\sqrt{20}}, 130 + 2.575 \cdot \frac{63.7354}{\sqrt{20}} \right) \\ \mu &\in (93.3020 ; 166.6980)\end{aligned}$$

Por tanto, se puede afirmar con un 99 % de probabilidad que el consumo medio de bebidas energéticas entre los jóvenes de edades comprendidas entre los 16 y 18 años, se encuentre entre 93.3020 y 166.6980 L, respectivamente.

### Ejercicio 116

Las agencias de publicidad han considerado de forma equivocada que la mayoría de los consumidores entienden casi toda la publicidad a la que tienen acceso en diversas plataformas. En sus investigaciones han tomado una muestra formada por 2300 consumidores mayores de trece años. Cada individuo veía unos anuncios para redes sociales de 30 segundos de duración. 1914 de los mismos malinterpretaron todo o parte de los anuncios. Bajo estas condiciones determina un intervalo de confianza del 95 % para la proporción de usuarios que malinterpretaron todo o parte de la publicidad utilizada en este estudio.

**Solución**

Se pide en este problema determinar un intervalo de confianza al 95 % de nivel de confianza para la proporción de individuos que no interpretan correctamente la publicidad a la que tiene acceso a través de ciertos soportes. Se sabe que la muestra está formada por  $n = 2300$  individuos de los cuales 1914 interpretó equivocadamente la publicidad. Con estos datos podemos determinar el valor de la proporción muestral.

$$\hat{p} = \frac{1914}{2300} = \frac{957}{1150} \implies \hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - \frac{957}{1150} = \frac{193}{1150}$$

Sabiendo que el valor crítico para este intervalo es  $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96$ , tenemos que el intervalo a calcular es el siguiente:

$$p \in \left( \hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \right)$$

$$p \in \left( \frac{957}{1150} - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{\frac{957}{1150} \cdot \frac{193}{1150}}{2300}}; \frac{957}{1150} + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{\frac{957}{1150} \cdot \frac{193}{1150}}{2300}} \right)$$

Operando, no con cierta paciencia obtenemos que el intervalo de confianza es (0.8169; 0.8474). En consecuencia podemos afirmar que la proporción de usuarios de publicidad malinterpretan la publicidad a la que tienen acceso está entre 81.69 y 84.79 %, respectivamente, con una probabilidad de 95 %.

**Ejercicio 117**

Se publica una encuesta en una red social sobre la gestión de las autoridades locales. A la pregunta planteada respondieron 380 personas de las cuales 325 se mostraron contrarios a la gestión del Ayuntamiento mientras que 55 se mostraron partidarios.

- Si se desea realizar una estimación de la proporción,  $p$ , de ciudadanos que respaldan la gestión municipal, ¿se puede considerar como fiable el procedimiento seguido por la web para llegar a estos resultados?
- Supongamos ahora que esas 380 personas que respondieron a la encuesta representan una muestra significativa. Encuentra un intervalo de confianza al 95 % para  $p$  e interprétalo.

**Solución**

Los datos obtenidos por la muestra no se pueden considerar significativos porque no constituyen una muestra aleatoria simple. Las personas que respondieron la encuesta lo hicieron libremente y no hubo un proceso de selección de muestras para hacer que la encuesta sea fiable.

Suponiendo que esta muestra sea fiable podemos calcular el intervalo de confianza para la proporción de ciudadanos que están a favor de la gestión municipal. De los datos del problema se deduce que la proporción muestral  $\hat{p}$  es:

$$\hat{p} = \frac{55}{380} = \frac{11}{76} \implies \hat{q} = 1 - \frac{11}{76} = \frac{65}{76}$$

Sabiendo que el valor crítico para este intervalo es  $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96$ , tenemos que el intervalo a calcular es el siguiente:

$$p \in \left( \hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \right)$$
$$p \in \left( \frac{11}{76} - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{\frac{11}{76} \cdot \frac{65}{76}}{380}}, \frac{11}{76} + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{\frac{11}{76} \cdot \frac{65}{76}}{380}} \right)$$

Operando obtenemos que el intervalo de confianza es (0.1093; 0.1801). En consecuencia podemos afirmar que la proporción de ciudadanos que respaldan la gestión municipal se encuentra entre el 10.93 y 18.01 %, respectivamente, con una probabilidad de 95 %.

### Ejercicio 118

En un estudio realizado a jóvenes de la Isla de Gran Canaria sobre si están o no en contra de la Unión Europea se ha concluido que el porcentaje de la proporción de jóvenes contrarios a la UE está entre el 15.2 % y el 24.8 % con una seguridad del 92 %.

- ¿Cuál ha sido el error muestral cometido?
- Determina el tamaño con el que se hizo la muestra.
- Si reducimos a la mitad la amplitud de dicho intervalo y con la misma confianza, ¿cuál sería ahora el porcentaje de jóvenes en contra de la UE?

### Solución

Por definición, el error muestral es la semi-amplitud del intervalo de confianza. En nuestro caso tenemos que:

$$E = \frac{0.248 - 0.152}{2} = \frac{0.096}{2} = 0.048$$

Por tanto, el error máximo admisible es del 4.8 %.

Como el nivel de confianza es 92 % el valor crítico asociado al mismo es  $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.77$ , y tomando como  $E = 0.048$ , y siendo la proporción muestral 0.2 (el punto medio del intervalo dado en el problema), concluimos que  $n = 70$ .

Finalmente, si redujésemos a la mitad el error tendríamos que  $E = \frac{0.048}{2} = 0.024$ , y por lo tanto el intervalo de confianza sería:

$$(0.2 - 0.024; 0.2 + 0.024) = (0.176; 0.224)$$

con un nivel de confianza del 92 %.

### Ejercicio 119

En una comunidad de vecinos tienen un viejo ascensor que puede transportar una carga máxima de 300 kg. Suponiendo que el peso de los vecinos se distribuye normalmente con una media de 63 kg y una varianza de 144 kg.

- ¿Cuál es la probabilidad de que un grupo aleatorio de cuatro de ellos sobrepase el peso límite?
- La presidenta de la Comunidad indica que el 64.8 % de las veces que el ascensor es usado por un grupo de 4 personas, el peso total de los usuarios no excede de un cierto peso, por supuesto inferior a 300 kg. Averigua a qué peso se refiere la presidenta de la Comunidad.

### Solución

Consideramos  $X$  a la variable aleatoria que mide el peso de los usuarios del ascensor comunitario. Esta variable sigue una ley normal de parámetros:

$$\mu = 63 \text{ kg} \quad \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ kg}$$

De modo que  $X \sim \mathcal{N}(63, 12)$ .

A partir de esta variable  $X$  podemos definir la variable “*peso total de cuatro ocupantes del ascensor*”. Esta nueva variable  $\sum_{i=1}^4 X_i$  sigue una ley normal de parámetros:

$$\mu' = n \cdot \mu = 4 \cdot 63 = 252 \text{ kg} \quad \sigma' = \sigma \cdot \sqrt{n} = 12 \cdot \sqrt{4} = 24 \text{ kg}$$

Por tanto,  $\sum_{i=1}^4 X_i \sim \mathcal{N}(252, 24)$ .

Se pide averiguar la probabilidad de que no se sobrepase el peso límite del ascensor, que es de 300 kg.

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^4 X_i > 300\right) &= P\left(Z > \frac{300 - 252}{24}\right) = P(Z > 2) \\ &= 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228 \end{aligned}$$

La probabilidad de que los cuatro pasajeros del ascensor superen el peso máximo permitido es del 2.28 %.

Se sabe que en el 64 % de las ocasiones no se supera el peso máximo de 300 kg, pero no se ha llegado a determinar el peso total de los usuarios del ascensor.

$$P\left(\sum_{i=1}^4 X_i \leq x_0\right) = 0.648 \implies P(Z \leq z_0) = 0.648 \implies z_0 = 0.38$$

Conocido este valor de  $z_0$  podemos averiguar el valor pedido.

$$0.38 = \frac{x_0 - 252}{24} \implies x_0 = 252 + 0.38 \cdot 24 \implies x_0 = 261.12 \text{ kg}$$

## Ejercicio 120

Beatriz y Laura comparten un reproductor de música digital que tiene una función que selecciona aleatoriamente qué canción reproducir. Se cargaron un total de 2345 canciones en el reproductor, algunas de Beatriz y el resto de Laura. Supongamos que cuando el reproductor estaba en el modo de selección aleatoria, 36 de las primeras 50 canciones seleccionadas eran canciones cargadas por Beatriz.

- Construye e interpreta un intervalo de confianza al 90 % de probabilidad para la proporción de canciones en el reproductor que fueron cargadas por Beatriz.
- ¿Qué tan grande sería necesaria una muestra para estimar la proporción de canciones cargadas por Beatriz con un 99 % y con un margen de error del 5 % como máximo?

### Solución

En primer lugar es necesario comprender que nos encontramos con una muestra formada por  $n = 50$  canciones de las cuales las 36 primeras fueras cargadas por Beatriz. De modo que se puede calcular la proporción muestral,  $\hat{p}$ , de canciones como:  $\hat{p} = \frac{36}{50} = 0.72$ .

El intervalo de confianza para la proporción poblacional a un nivel de confianza del 90 % es

$$p \in \left( \hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \right)$$

$$p \in \left( 0.72 - 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.72 \cdot 0.28}{50}}; 0.72 + 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.72 \cdot 0.28}{50}} \right)$$

Lo que significa que a un 90 % de probabilidad la proporción de canciones cargadas en el reproductor que fueron cargadas por Beatriz se encuentra entre 61.55 % y 82.45 %, respectivamente.

Para responder tenemos que determinar el tamaño de la muestra para que:

$$z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 0.05$$

de donde se sigue que

$$n = \left( \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{0.05} \right)^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q} = \left( \frac{1.645}{0.05} \right)^2 \cdot 0.72 \cdot 0.28 = 536.7720$$

En este caso la muestra debería estar formada por un mínimo de 537 canciones.

## Ejercicio 121

Informes de las autoridades sanitarias afirman el contenido de alquitrán y nicotina una cierta marca de cigarros está entre 0.4 y 5 mg por cigarrillo. En el informe no consta la cantidad de cigarros que fueron utilizados para obtener esos resultados. Se sabe que la desviación típica del contenido de alquitrán es de 1 mg por unidad. Si los investigadores tienen como finalidad determinar el contenidos medio de alquitrán por cigarro con un error inferior a 0.1 mg, ¿cuántos cigarros tendrán que ser analizados con un nivel de significación del 1 %?

### Solución

Para resolver este problema es preciso, simplemente, tomar en consideración la expresión que nos proporciona el error máximo admisible en una estimación sobre la media poblacional.

$$E < z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

En esta expresión conocemos todos los elementos de la misma salvo  $n$ , que es el tamaño de la muestra a determinar.

$$\begin{aligned} E < z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} &\Rightarrow 0.1 < 2.575 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.1 < \frac{2.575}{\sqrt{n}} \\ &\Rightarrow \sqrt{n} > \frac{2.575}{0.1} \Rightarrow \sqrt{n} > 25.75 \Rightarrow n > 25.75^2 = 663.0625 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la muestra debe estar formada por un mínimo de 664 cigarros.

## Ejercicio 122

En un estudio realizado a 500 personas desempleadas sobre si creen que van a conseguir un trabajo en lo que queda de año, contestan afirmativamente 175. De ellos el 20 % creen que conseguirán un trabajo adaptado a sus necesidades, mientras que 3 de cada 5 personas de las que no creen conseguir trabajo piensan lo contrario.

- ¿Cuántas personas de dicha muestra piensan que el trabajo posible está adaptado a sus necesidades?
- Determina, con una seguridad del 94 %, un intervalo de confianza para la proporción de personas optimistas en esta población.
- Si antes de conocer el resultado se quiere determinar un intervalo de confianza con el mismo nivel y un error máximo del 2 %, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra?

### Solución

El número de personas que han sido seleccionadas para formar parte de la muestra que consideran que el trabajo posible está adaptado a sus necesidades es:

$$20\% \text{ de } 175 + \frac{2}{5} \text{ de } 325 = 0.2 \cdot 175 + 0.4 \cdot 325 = 165 \text{ personas.}$$

Para responder a la segunda cuestión es preciso considerar el valor de la proporción muestral que en este caso es

$$\hat{p} = \frac{175}{500} = 0.35.$$

Así para un nivel de confianza del 94 % el valor crítico sería  $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.88$  y el intervalo de confianza para la proporción de optimistas sería:

$$p \in \left( \hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \right)$$
$$p \in \left( 0.35 - 1.88 \cdot \sqrt{\frac{0.35 \cdot 0.65}{500}}; 0.35 + 1.88 \cdot \sqrt{\frac{0.35 \cdot 0.65}{500}} \right)$$

Realizando las operaciones necesarias se obtiene el intervalo (0.3099 ; 0.3901).

Para responder a la tercera cuestión debemos considerar que  $p = q = 0.5$  para poder averiguar el tamaño mínimo de la muestra para conseguir un error inferior a 0.02. En este caso tendríamos que:

$$E < z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow 0.02 < 1.88 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}}$$
$$\Rightarrow 0.0004 < 3.5344 \cdot \frac{0.25}{n} \Rightarrow n > \frac{3.5344 \cdot 0.25}{0.0004} \Rightarrow n > 2209$$

Por lo tanto, la muestra debería estar formada por 2010 individuos como mínimo.

### Ejercicio 123

La ficha técnica de una encuesta indica:

*“Universo: Mayores de 18 años. Ámbito: Nacional. Muestra: 1000 entrevistas con un margen de error  $\pm 3.16$  para datos globales, con un nivel de confianza del 95.5 % (dos sigma) y un  $\frac{p}{q} = \frac{50}{50}$ . Selección: Estratificada, aleatoria. Entrevista; Telefónica. Fecha de trabajo de campo: del 16 al 18 de febrero de 2016. Realización: SIGMA DOS. Dirección: José Miguel de Elías.”*

Comprueba si el margen de error es el indicado

#### Solución

El margen de error es el correcto, ya que el margen de error para un nivel de confianza del 95.5 % es:

$$E < z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \implies E < 2 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{1000}} < 0.0316$$

### Ejercicio 124

En un Centro Comercial de Las Palmas de Gran Canaria están realizando un estudio sobre si el cine sigue siendo rentable o no en esta época. Para ello han contratado a una empresa que ha realizado un estudio aleatorio a 300 personas sobre los siguientes aspectos

|                                                                |      |
|----------------------------------------------------------------|------|
| Acuden al menos una vez mensual al cine                        | 120  |
| De los que acuden, eligen ver películas de acción              | 45   |
| De los que acuden, eligen ver películas de ficción             | 30 % |
| De los que acuden, eligen películas de animación               | 9    |
| De los que no acuden, tienen plataforma de cine online en casa | 60 % |

- ¿Cuántas personas usuarias del cine ven otro tipo de películas distintas a las mencionadas?
- Si tenemos en cuenta que el 20 % de los que acuden al cine tienen plataforma online, ¿qué probabilidad hay de que una persona escogida al azar no tenga plataforma online?

- c) Si queremos estimar la proporción de personas que van al cine con regularidad, ¿cuál sería el intervalo de confianza al 92 %?
- d) ¿Cuánto debería ser el tamaño muestral necesario para cometer un error inferior al 2 % con los mismos datos que en el apartado anterior?

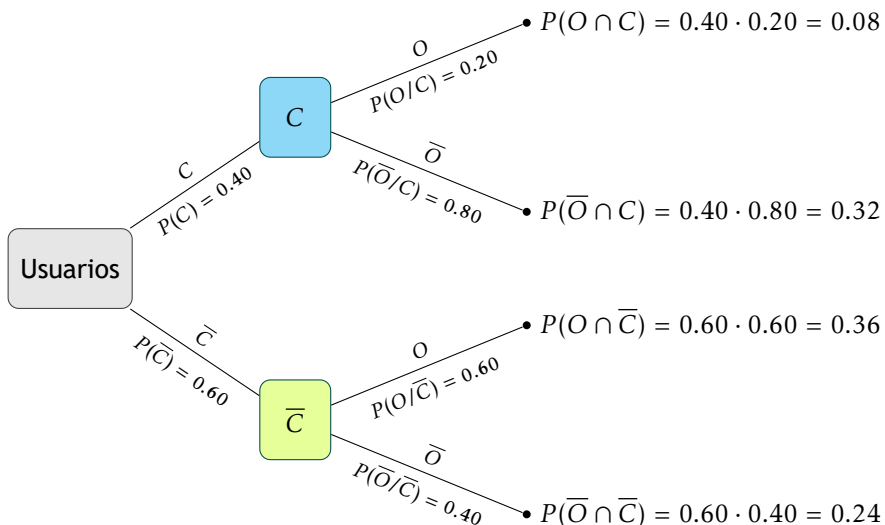
### Solución

Para responder a la primera cuestión tan solo es necesario calcular unos porcentajes y hacer una resta.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Usuarios} = 120 \\ \text{Acción} = 45 \\ \text{Ficción} = 30\% \text{ de } 120 = 36 \\ \text{Animación} = 9 \\ \text{Resto} = ? \end{array} \right\} \rightarrow \text{Resto} = 120 - 45 - 36 - 9 = 30$$

Para responder a la segunda cuestión tenemos que hacer uso de un árbol de probabilidades en la que aparecen los siguientes sucesos

- $C$  = “Acude al cine”
- $\bar{C}$  = “No acude al cine”
- $O$  = “Usuario de plataformas”
- $\bar{O}$  = “No usuario de plataformas”



Si aplicamos el teorema de la probabilidad total podemos saber la probabilidad de que una persona de las escogidas no tenga plataforma online.

$$P(\bar{O}) = P(C \cap \bar{O}) + P(\bar{C} \cap \bar{O}) = 0.32 + 0.24 = 0.56$$

En consecuencia, podemos concluir que el 56 % de los encuestados no disponen de plataformas online.

Ahora pasamos a determinar un intervalo de confianza al 92 % sobre la proporción de personas que acuden regularmente al cine. Para ello usaremos como muestra la realizada en el centro comercial, donde  $\hat{p} = 0.4$  y  $n = 300$ .

$$\begin{aligned} & \left( \hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} ; \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \right) \\ &= \left( 0.40 - 1.75 \cdot \sqrt{\frac{0.40 \cdot 0.60}{300}} ; 0.40 + 1.75 \cdot \sqrt{\frac{0.40 \cdot 0.60}{300}} \right) \end{aligned}$$

Realizando las operaciones necesarias se obtiene el intervalo (0.3505; 0.4495).

Por tanto, se puede afirmar con un nivel de confianza del 92 % que la proporción de usuarios a las salas de cine está comprendida entre el 35.05 y 44.95 %.

Quedaría por determinar el tamaño de la muestra para conseguir un error inferior al 2 % con un mismo nivel de confianza.

$$\begin{aligned} E < z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p} \hat{q}}{n}} &\Rightarrow 0.02 < 1.75 \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{n}} \Rightarrow 0.02 < 1.75 \sqrt{\frac{0.24}{n}} \\ &\Rightarrow n > \left( \frac{1.75}{0.02} \right)^2 \cdot 0.24 \Rightarrow n > 1837.5 \end{aligned}$$

Por tanto, la muestra debe estar formada por 1838 individuos para poder asegurar el error indicado.

## Ejercicio 125

Según unos estudios de la Facultad de Veterinaria de la ULPGC afirman, con una seguridad del 99 %, que los perros llamados “*mil leches*” tienen un peso medio de entre 7.12 y 7.68 kilogramos. Si dicho estudio se ha realizado sobre una muestra de 30 caninos, y teniendo en cuenta que la distribución que sigue el peso de los animales es una normal.

- El peso medio de dichos “*mil leches*”.
- La desviación típica usada.
- ¿Cuántos animales tendríamos que observar si queremos que el intervalo, al 95 % de confianza, tenga la misma amplitud que la desviación típica?

### Solución

Como conocemos los extremos del intervalo de confianza podemos determinar la media muestral que el punto medio del mismo.

$$\bar{X} = \frac{7.12 + 7.68}{2} = \frac{14.80}{2} = 7.4 \text{ kg}$$

Si tenemos en cuenta como valor crítico para un nivel de confianza del 99 %,  $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575$ , la desviación típica sería:

$$\begin{aligned} 7.68 &= 7.4 + 2.575 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{36}} \Rightarrow 7.68 - 7.4 = \frac{2.575}{6} \cdot \sigma \\ \Rightarrow \sigma &= \frac{0.28 \cdot 6}{2.575} \Rightarrow \sigma = 0.6524 \text{ kg} \end{aligned}$$

Se pretende que el error máximo admisible sea ahora del 0.3 kg. Para un nivel de confianza del 95 % el valor crítico a utilizar es  $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ , de modo que tenemos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} E < z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} &\Rightarrow 0.3 < 1.96 \cdot \frac{0.6524}{\sqrt{n}} \\ \Rightarrow n &> \left( \frac{1.96 \cdot 0.6524}{0.3} \right)^2 \Rightarrow n > 16.6950 \end{aligned}$$

Con lo que la muestra debe estar formada por 17 perros, como mínimo.

### Ejercicio 126

En una región cuadrada de 3 km de lado, la línea de costa se extiende desde el punto (0, 0) al punto (3, h), siguiendo el recorrido de una función polinómica de la forma  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  cuyos máximo y mínimo se encuentran, respectivamente en  $x = 1$  y en  $x = 2$ . La zona terrestre se encuentra al norte y la zona marina al sur, tal como se muestra en la figura siguiente:

Se sabe que si se lanzan paracaidistas completamente al azar sobre esta región de forma que sea igualmente probable que caigan en cualquier punto de la misma, la probabilidad de que caigan en el mar es 0.45. ¿Cuál es el valor de h?

### Solución

Como  $f(x)$  pasa por (0, 0) se sigue que  $f(0) = 0$  y por tanto  $d = 0$ . Asimismo, sabemos que la función  $f(x)$  tiene sus máximo y mínimo en  $x = 1$  y  $x = 2$ , lo que significa que estos valores son raíces de  $f'(x)$ . Por tanto  $f'(x)$  debe ser de la forma  $f'(x) = k(x - 1)(x - 2) = kx^2 - 3kx + 2k$ .

Ahora bien, como  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , se tiene que  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ ; por tanto, igualando a la expresión anterior  $f'(x) = kx^2 - 3kx + 2k$ , se sigue que

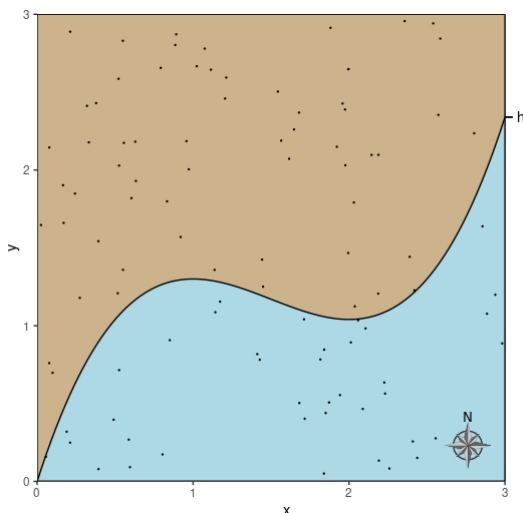


Figura 5.2: Región definida en el enunciado.

$3a = k$ ,  $2b = -3k$  y  $c = 2k$ . Como  $k = 3a$ , de  $2b = -3k$  se sigue que  $2b = -9a$  y por tanto  $b = -\frac{9}{2}a$ . Asimismo  $c = 2k = 2 \cdot 3a = 6a$ . De esta forma, podemos expresar la función  $f(x)$  como:

$$f(x) = ax^3 - \frac{9}{2}ax^2 + 6ax = a\left(x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x\right)$$

Ahora, si se eligen puntos al azar del mapa, la probabilidad de que caigan en el mar será igual a la proporción que representa la superficie del mar con respecto a la superficie total del mapa, esto es:

$$P(\text{Caer en el mar}) = \frac{\text{Área (mar)}}{\text{Área Total}} = \frac{\text{Área (mar)}}{9}$$

Como esta probabilidad es 0,45 concluimos que  $\text{Área (mar)} = 9 \cdot 0,45 = 4,05 \text{ km}^2$ . La superficie del mar coincide con la integral de  $f(x)$  entre 0 y 3. Por tanto:

$$\begin{aligned} \int_0^3 a\left(x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x\right) dx &= 4,0577 \\ a\left[\frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2}\right]_0^3 &= 4,0577 \\ a\left[\frac{3^4}{4} - \frac{9}{2}\frac{3^3}{3} + 6\frac{3^2}{2}\right] &= 4,0577 \\ \frac{27}{4}a &= 4,0577 \end{aligned}$$

De donde:

$$a = \frac{4 \cdot 4,05}{27} = \frac{16,2}{27}$$

Por último,

$$h = f(3) = \frac{16,2}{27} \left( 3^3 - \frac{9}{2} 3^2 + 6 \cdot 3 \right) = \frac{16,2}{27} \cdot \frac{9}{2} = \frac{8,1}{3} = 2,7$$

## Bibliografía

- [1] [http://www.musat.net/web\\_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf](http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf)
- [2] <https://www.ebaumatematicas.com/matematicas-ii/>
- [3] <https://www.matematica.pt/exames/exame-nacional-12-ano.php>
- [4] <https://www.quantamagazine.org/>
- [5] <https://www.futilitycloset.com/>
- [6] <https://nrich.maths.org/>
- [7] <https://plus.maths.org/content/>



# Índice alfabético

- ángulo recta-plano, 78
- aproximación a la normal, 101, 108
- áreas
  - análisis, 55, 63, 66, 67, 68, 126
  - geometría, 13, 14, 77, 80
- aritmética, 37, 40
- asíntotas, 41, 46, 48, 50, 56, 57, 65
  
- combinación lineal, 70
- combinatoria, 15, 87, 88, 89, 90, 92
- continuidad, 41, 42, 46, 50
- contradicción, 6, 39
  
- deducción, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 16, 37, 38, 39, 40
- dependencia lineal, 17, 24, 31
- derivadas, 4, 42, 44, 45, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 58, 59, 60, 61, 62, 64, 65, 126
- desigualdad, 40
- desigualdades, 34, 35
- determinantes, 10, 17, 23, 25, 31
- distancia
  - entre puntos, 40, 81
  - entre rectas, 77
  - punto-plano, 74, 79, 83
- distancia entre puntos, 83
- distribución
  - binomial, 101, 102, 108
  - media muestral, 104, 121
  - normal, 95, 101, 103, 104, 105, 106, 107, 119
  - proporción muestral, 109
  - sumas muestrales, 119
- divisor, 7, 8, 11

- ecuación
  - de un plano, 76
  - de una recta, 9, 74, 76, 78
- error muestral
  - proporción, 118, 123
- esfera, 9
- esperanza matemática, 99, 100, 122
- experimentación, 38
- familia de planos, 82
- independencia lineal, 24, 31
- inecuaciones, 34, 35
- integrales, 42, 44, 54, 55, 61, 62, 63, 66, 67, 68
- intervalo de confianza
  - media, 115, 125
  - proporción, 110, 112, 114, 116, 117, 120, 122, 124
- ley de Laplace, 85, 87, 88, 89, 90, 92, 93
- logaritmo, 3
- límites, 42, 43, 46, 48, 50, 56, 57, 61
- lógica, 1, 2, 3, 5, 6, 16, 37, 38, 39
- matrices
  - ampliada, 26
  - inversa, 10, 22, 23
  - potencias, 10, 18
  - producto, 10, 22, 32
  - rango, 24, 25
  - simetría, 19, 20, 21
  - traspuesta, 19, 20, 21
- menores, 25
- monotonía, 44, 45, 46, 48, 62
- múltiplo, 1, 7, 8, 11, 12
- nivel de confianza, 113
- optimización, 4, 48, 51, 52, 58, 59, 60
- orden, 40
- paralelismo, 77, 82
- perpendicularidad, 70, 73, 75, 80
- perímetro, 5
- planos bisectores, 79
- polinomios, 33

- posición relativa
  - de rectas, 73, 80
- probabilidad
  - condicionada, 86, 93, 94, 101, 107
  - cálculos, 85, 88, 89, 90, 92, 94, 99, 100, 111, 126
  - total, 91, 92, 96, 97, 98, 107, 124
- producto
  - mixto, 84
  - vectorial, 70, 71, 72
- programación lineal, 35
- progresiones
  - geométricas, 36
- punto
  - de intersección, 74, 81
  - medio, 81
  - simétrico, 75
- puntos críticos, 4, 44, 45, 48, 49, 50, 53, 60, 62
- recta
  - normal, 64
  - tangente, 42, 64, 65
- rectas coplanarias, 76
- representación de funciones, 33, 47
- sistemas
  - clasificación, 26, 27
  - de ecuaciones, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33
  - de inecuaciones, 35
  - homogéneos, 27
- tamaño muestral
  - media, 121, 125
  - proporción, 110, 111, 118, 120, 122, 124
- tanteo, 38
- Teorema
  - de Bayes, 91, 96, 97, 98
  - de la probabilidad total, 97
- valor crítico, 112, 113, 119, 125
- vectores
  - fijos, 69
  - libres, 69
  - operaciones, 69, 70, 72
- volumen, 84



# Índice de figuras

|      |                                                                                |     |
|------|--------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1.1  | Cuatro cartas con una letra en una cara y un número por la otra.....           | 11  |
| 1.2  | Posibles huertos. ....                                                         | 13  |
| 1.3  | Representación del enunciado. ....                                             | 15  |
| 1.4  | Diagrama de árbol con todos los divisores de 540. ....                         | 18  |
| 1.5  | Representación del enunciado. ....                                             | 19  |
| 1.6  | Colocación de las monedas. ....                                                | 22  |
| 1.7  | Cuadrado de lado $2r$ .....                                                    | 22  |
| 1.8  | Áreas de las salas. ....                                                       | 23  |
| 1.9  | Notación. ....                                                                 | 23  |
| 1.10 | Representación del enunciado. ....                                             | 24  |
| 1.11 | Posibles triángulos.....                                                       | 24  |
| 1.12 | Solución. ....                                                                 | 25  |
| 3.1  | $f'(x)$ : derivada de la función $f(x)$ .....                                  | 71  |
| 3.2  | Gráfica de $f(x) = \frac{1}{90}(-x^2 + 100x - 1600)$ .....                     | 75  |
| 3.3  | Gráfica de $g(x) = 10x - x^2 - 21$ . ....                                      | 76  |
| 3.4  | Invernadero encerrado por $g(x)$ y $h(x)$ .....                                | 86  |
| 3.5  | $f(x) = 6 - \frac{1}{6}x^2$ . ....                                             | 90  |
| 3.6  | Representantes para estudiar el crecimiento.....                               | 92  |
| 3.7  | $f(x) = \sqrt{x^2} - x^2$ .....                                                | 93  |
| 3.8  | $x^2 + y^2 = 9$ , circunferencia centrada en $(0, 0)$ y de radio 3. ....       | 97  |
| 3.9  | $l(x) = \frac{2x}{1 - x^2}$ con $x > 1$ y recta tangente. ....                 | 100 |
| 3.10 | Forma del logotipo $f(x) = (x + 3)^2$ , $g(x) = \frac{x + 6}{4}$ . ....        | 101 |
| 3.11 | Área encerrada por $f(x) =  x $ y $g(x) = 2 - x^2$ .....                       | 102 |
| 4.1  | Paralelogramo. ....                                                            | 109 |
| 4.2  | Magnitudes vectoriales y trayectoria.....                                      | 110 |
| 4.3  | Tubería. ....                                                                  | 111 |
| 4.4  | Representación del enunciado. ....                                             | 113 |
| 4.5  | Representación del enunciado. ....                                             | 116 |
| 4.6  | Planos del enunciado $\pi_1$ , $\pi_2$ , y soluciones $\pi_3$ , $\pi_4$ . .... | 120 |

|     |                                      |     |
|-----|--------------------------------------|-----|
| 4.7 | Posibles cuadrados.....              | 122 |
| 4.8 | Representación del enunciado. ....   | 123 |
| 5.1 | Curva normal.....                    | 160 |
| 5.2 | Región definida en el enunciado..... | 181 |



